

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А.СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Пржиялковский Виктор Владимирович

УДК: 512.76

ТОРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛАНДАУ–ГИНЗБУРГА

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.	3
Соглашения и обозначения	26
Часть 1. Предварительные сведения.	28
1.1. Инварианты Громова–Виттена и I -ряды	28
1.1.1. Инварианты Громова–Виттена	28
1.1.2. I -ряды	30
1.2. Торическая геометрия	32
Часть 2. Торические модели Ландау–Гинзбурга	37
Часть 3. Поверхности дель Пеццо	42
3.1. Общая конструкция	42
3.2. Гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева	51
3.2.1. Числа $f^{p,q}(Y, w)$	54
3.2.2. Числа $h^{p,q}(Y, w)$	54
3.2.3. Числа $i^{p,q}(Y, w)$	56
3.2.4. Гипотезы	57
3.3. Гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева для поверхностей	60
3.3.1. Действие монодромии на относительных когомологиях	61
3.3.2. Топология рациональных эллиптических поверхностей	66
3.3.3. Числа Ходжа моделей Ландау–Гинзбурга для рациональных эллиптических поверхностей	71
3.3.4. Конец доказательства теоремы 3.33 и обсуждение	81
Часть 4. Трехмерные многообразия Фано	84
4.1. Слабые модели Ландау–Гинзбурга	84
4.2. Компактификации Калаби–Яу	90
4.3. Торические модели Ландау–Гинзбурга	103

4.4.	Модулярность	109
4.4.1.	Факты о решетках	112
4.4.2.	Эллиптические расслоения на поверхностях типа КЗ	114
4.4.3.	Решетки Пикара моделей Ландау–Гинзбурга	116
Часть 5.	Полные пересечения	131
5.1.	Конструкция Гивенталья	131
5.2.	Слабые модели Ландау–Гинзбурга	137
5.3.	Компактификации Калаби–Яу	139
5.4.	Торические модели Ландау–Гинзбурга	145
Часть 6.	Полные пересечения в грассманианах	152
6.1.	Конструкция	152
6.2.	Периоды	164
Часть 7.	Числа Ходжа	168
Часть 8.	Проекции	199
8.1.	Торические базовые линки для поверхностей дель Пеццо	200
8.2.	Торические базовые линки для трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями	202
Часть 9.	Неф-разбиения	214
9.1.	Неф-разбиения для полных пересечений дивизоров Картье	215
9.2.	Неф-разбиения для коразмерности 2	219
9.3.	Четырех- и пятимерные гладкие взвешенные полные пересечения Фано	235
	Список работ, в которых опубликованы основные результаты диссертации	241
	Список литературы	243

Введение.

Одной из наиболее ярких идей в математике за последние тридцать лет является идея зеркальной симметрии. Как это часто бывает, в математику она пришла из математической физики. А именно, важную роль в описании поведения элементарных частиц в теории струн играли трехмерные многообразия Калаби–Яу, то есть многообразия комплексной размерности три, имеющие нигде не обращающуюся в ноль везде определенную голоморфную 3-форму. Снабдив такие многообразия симплектической формой и комплексной структурой, их можно рассматривать как, с одной стороны, симплектические, а с другой стороны, алгебраические многообразия. Физики заметили, что трехмерные многообразия можно разбить на (неоднозначно определенные) пары, такие что симплектические свойства многообразия Калаби–Яу X (так называемые браны типа A) соответствуют алгебраическим свойствам парного многообразия Y (так называемым бранам типа B) и наоборот, симплектические свойства для Y соответствуют алгебраическим свойствам для X . Одним из численных проявлений такого соответствия является “зеркальная симметрия ромбов Ходжа”, то есть равенства $h^{i,j}(X) = h^{i,3-j}(Y)$. Неформально можно сказать, что приставив зеркало к ромбу Ходжа для X , в нем можно увидеть ромб Ходжа для Y , откуда и произошло само название “зеркальная симметрия”.

Почти сразу после того, как было сделано это наблюдение, оно получило прямое обобщение на случай многомерных многообразий Калаби–Яу, а также были сформулированы некоторые численные следствия обнаруженного соответствия, которые позволили математически строго сформулировать идею зеркальной симметрии. Первым примером такого обобщения стала знаменитая статья [COGP91], в которой была рассмотрена общая гиперповерхность степени 5 в \mathbb{P}^4 . Для такой гиперповерхности был рассмотрен некоторый специальный ряд, который строился по (ожидаемым) числам рациональных

кривых заданной степени, лежащих на рассматриваемой квинтике (согласно гипотезе Клеменса, такие числа конечны). Было предъявлено некоторое конкретное одномерное семейство, такое, что период для этого семейства, то есть функция, задаваемая интегралами послойных циклов по послойным формам, после некоторого преобразования совпадает с этим специальным рядом для квинтики. Этот принцип, сопоставляющий ряд, построенный по числам рациональных кривых, лежащих на многообразии, периодам двойственного однопараметрического семейства, лег в основу гипотезы зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа.

Дальнейшим обобщением гипотезы зеркальной симметрии стала ее формулировка для многообразий Фано, то есть многообразий с обильным антиканоническим классом. Такие многообразия играют огромную роль в алгебраической геометрии: например, они являются главными “строительными кирпичами” в программе минимальных моделей. Кроме того, они имеют очень богатую геометрию; так, на них лежит много рациональных кривых. В отличие от случая многообразий Калаби–Яу, многообразиям Фано зеркальная симметрия сопоставляет не многообразие такого же типа, а некоторое специальное одномерное семейство, которое называется моделью Ландау–Гинзбурга. Слоями этого семейства, в частности, являются многообразия Калаби–Яу, которые зеркально двойственны антиканоническим сечениям многообразия Фано. Гивенталь (см. [Gi97b]), а позже, независимо и с физической точки зрения, Хори и Вафа (см. [HV00]) построили, и для случая многообразий Калаби–Яу и для случая многообразий Фано, такие семейства для полных пересечений в горенштейновых торических многообразиях (их конструкцию мы более детально опишем чуть ниже).

Дальнейшим шагом стала предложенная Концевичем гипотеза гомологической зеркальной симметрии, формулирующая зеркальное соответствие в терминах производных категорий. А именно, многообразие Фано X как

алгебраическому многообразию можно сопоставить производную категорию когерентных пучков $D^b(\text{coh } X)$, а как симплектическому (для выбранной на нем симплектической формы) — категорию Фукаи $Fuk(X)$, объектами которой являются лагранжевы подмногообразия для этой формы, а морфизмы определяются гомологиями Флоера. С другой стороны, подобные категории можно определить и для модели Ландау–Гинзбурга $w: Y \rightarrow \mathbb{C}$, то есть для многообразия Y , снабженного непостоянной комплекснозначной функцией w , называемой суперпотенциалом. Роль производной категории когерентных пучков для модели Ландау–Гинзбурга будет играть производная категория особенностей $D_{sing}^b(Y, w)$, то есть произведение по всем особым слоям фактора производной категории когерентных пучков по подкатегории совершенных комплексов, а роль категории Фукаи — категория Фукаи–Зайделя $FS(Y, w)$, объектами которой являются исчезающие к особенностям лагранжевы циклы (для выбранной на модели Ландау–Гинзбурга симплектической формы). Гипотеза гомологической зеркальной симметрии утверждает эквивалентности категорий

$$Fuk(X) \simeq D_{sing}^b(Y, w),$$

$$D^b(\text{coh } X) \simeq FS(Y, w).$$

Гипотеза гомологической зеркальной симметрии очень сильна (достаточно сказать, что, согласно теореме Бондала–Орлова, по производной категории когерентных пучков на многообразии Фано можно восстановить само это многообразие), но, во многом из-за этого, ее сложно доказать даже для простейших случаев. В качестве примера упомянем доказательство части гипотезы (то есть одной из эквивалентностей в ней) для поверхностей дель Пеццо ([AKO06]), торических многообразий ([Ab09]) и некоторых гиперповерхностей ([Sh15]). Поэтому естественным представляется изучение несколько ослабленной версии гипотезы гомологической зеркальной симметрии, взяв за определение одно из важных ее свойств. Это позволит эффективно строить

и изучать зеркальное соответствие, а также его следствия, как для гомологической зеркальной симметрии, так и для геометрии многообразий Фано.

Таким обобщением является гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа, которая исторически возникла раньше гипотезы гомологической зеркальной симметрии, и которую мы упоминали в контексте примера трехмерной квинтики. Она является проявлением того, что из эквивалентности категорий следует эквивалентность их когомологий Хохшильда, которые, в нашем случае, соответствуют квантовым когомологиям и вариации структур Ходжа. А именно, по многообразию X можно построить так называемое кольцо квантовых когомологий — деформацию обычного кольца когомологий, структурными константами которой являются трехточечные примарные инварианты Громова–Виттена рода ноль, то есть ожидаемые числа рациональных кривых определенной степени, лежащие на многообразии (тут важно, что X является многообразием Фано или “близким” к нему, иначе на нем не найдется достаточного количества рациональных кривых). С помощью квантовых когомологий можно определить вторую связность Дубровина, которая задается квантовым умножением на дивизоры в тривиальном расслоении со слоем $H^*(X)$ и базой — тором, соответствующим решетке Пикара $\text{Pic}(X)$. Решением для соответствующего (регуляризованного) \mathcal{D} -модуля является так называемый I -ряд (или, что то же самое, J -ряд Гивенталья), то есть производящий ряд одноточечных инвариантов Громова–Виттена с по- томками. С другой стороны, однопараметрическому семейству $w: Y \rightarrow \mathbb{C}$ можно сопоставить периоды, то есть функции, определяемые послойными интегралами выбранных симплектических форм по выбранным циклам. Гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа утверждает, что периоды совпадают (или преобразуются при помощи простых преобразований) с I -рядом. Иными словами, это значит, что вторая связность Дубровина для

многообразия Фано совпадает со связностью Гаусса–Манина для двойственной модели Ландау–Гинзбурга, или что регуляризованное квантовое дифференциальное уравнение для многообразия совпадает с уравнением Пикара–Фукса для двойственной модели.

Первый и основной пример выполнения гипотезы зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа привел Гивенталь, построив модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в гладких торических многообразиях (в дальнейшем конструкция Гивенталья была обобщена). Этот пример играет важную роль для настоящей работы, поэтому приведем его.

Пусть T — гладкое торическое многообразие Фано размерности N с числом Пикара ρ . Пусть $D_1, \dots, D_{N+\rho}$ — компоненты его граничного дивизора. Пусть X_1, \dots, X_k — классы обильных дивизоров на T , высекающих гладкое полное пересечение Фано X . Предположим для простоты, что $\dim X = N - k > 2$. Положим $X_0 = -K_T - X_1 - \dots - X_k$. Выберем базис $\{H_1, \dots, H_\rho\} \subset H^2(T)$, состоящий из классов численно эффективных дивизоров. Введем формальные переменные q_1, \dots, q_ρ , соответствующие выбранному базису, и обозначим $q^\beta = q_1^{\beta \cdot H_1} \dots q_\rho^{\beta \cdot H_\rho}$. В работе [Gi97b], что показано, что свободный член, то есть коэффициент при $\mathbf{1} \in H^*(X)$, регуляризованного I -ряда для X равен

$$\tilde{I}_0^X(q_1, \dots, q_\rho) = \exp(\mu(q)) \cdot \sum_{\beta \in K} q^\beta \frac{\prod_{i=0}^k |\beta \cdot X_i|!}{\prod_{j=1}^{N+\rho} |\beta \cdot D_j|!^{\frac{\beta \cdot D_j}{|\beta \cdot D_j|}}},$$

где $\mu(q)$ — некоторый простой коррекционный член, а

$$K = NE_1(X) \cap H_2(X, \mathbb{Z}).$$

Опишем теперь конструкцию Гивенталья двойственной модели Ландау–Гинзбурга для X и вычислим ее периоды. Введем $N + \rho$ формальных переменных $u_1, \dots, u_{N+\rho}$, соответствующих дивизорам $D_1, \dots, D_{N+\rho}$. Решетку

Пикара с помощью выбранного базиса можно отождествить с решеткой соотношений на порождающие вектора лучей веера для T . Запишем соотношения, соответствующие дивизорам H_i , как мономы Лорана R_i от переменных u_j . Для конструкции модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья необходимо выбрать так называемое неф-разбиение, то есть разбиение множества $[1, N + \rho]$ на непересекающиеся подмножества E_0, \dots, E_k , такие что для всех $i \in [1, k]$ дивизор $\sum_{j \in E_i} D_j$ линейно эквивалентен гиперповерхности X_i . Моделью Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья для X называется подмногообразие $LG_0(X)$ в торе $\text{Spec } \mathbb{C}_q[u_1^{\pm 1}, \dots, u_{N+\rho}^{\pm 1}]$, заданное уравнениями

$$R_i = q_i, \quad i \in [1, \rho],$$

и

$$\sum_{s \in E_j} u_s = 1, \quad j \in [1, k],$$

с функцией $w = \sum_{s \in E_0} u_s$, называемой суперпотенциалом (здесь $\mathbb{C}_q = \mathbb{C}[q_1^{\pm 1}, \dots, q_\rho^{\pm 1}]$). Согласно Гивенталю (см. [Gi97b]), периоды такой модели равны интегралу

$$I_X^0 = \frac{1}{(2\pi i)^{N+\rho}} \int_{\delta} \frac{\frac{du_1}{u_1} \wedge \dots \wedge \frac{du_{N+\rho}}{u_{N+\rho}}}{\prod_{i=1}^{\rho} (1 - \frac{q_i}{R_i}) \cdot \prod_{j=0}^k \left(1 - \left(\sum_{s \in E_j} u_s\right)\right)} \in \mathbb{C}[[q_1, \dots, q_\rho]].$$

Теорема Гивенталья утверждает, что

$$\tilde{I}_0^X = I_X^0.$$

Таким образом, $LG_0(X)$ является зеркально двойственной моделью Ландау–Гинзбурга для X с точки зрения гипотезы зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа. (Выбрав дивизор $D \in \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{C}$, можно, с помощью координат его разложения в базисе $\{H_i\}$, специализировать переменные q_i и получить из $LG_0(X)$ обычное многообразие с суперпотенциалом.)

Конструкцию Гивенталья можно обобщить, применив ее к полным пересечениям в особых торических многообразиях и, более общо, в многообразиях,

допускающих “хорошие” торические вырождения, таких, как грассманианы или многообразия частичных флагов (см. [BCFKS97] и [BCFKS98]). Кроме того, модели Гивенталья часто можно упростить, мономиально выразив одни переменные через другие для первой группы уравнений и бирационально для второй. Суперпотенциал w после первой замены станет многочленом Лорана от N переменных, многогранник Ньютона которого совпадает с веерным многогранником для T , то есть выпуклой оболочкой образующих лучей веера для T . Во многих случаях вторую, бирациональную замену переменных можно сделать так, что суперпотенциал также будет оставаться многочленом Лорана. Кроме того, такие замены соответствующим образом преобразуют интеграл Гивенталья. А именно, после ограничения модели Ландау–Гинзбурга на подтор, соответствующий дивизору D , интеграл примет вид

$$\frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\delta} \frac{\frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_N}{x_N}}{1 - t f_{X,D}},$$

где $f_{X,D}$ — некоторый многочлен Лорана (соответствующий торическому вырождению многообразия X). Этот интеграл будет по-прежнему периодом для модели Ландау–Гинзбурга, если бирациональные преобразования бирегулярны в окрестности циклов, по которым мы интегрируем. Его легко найти, разложив знаменатель в ряд по t : он равен $1 + [f_{X,D}]_0 t + [f_{X,D}^2]_0 t^2 + \dots$, где через $[f]_0$ обозначен свободный член многочлена Лорана f .

Рассмотрим горенштейново торическое многообразие. Оно рефлексивно, то есть многогранник, двойственный его веерному многограннику, целочисленен. Антиканолическую линейную систему на этом торическом многообразии можно описать как линейную систему многочленов Лорана с носителем в двойственном многограннике. Таким образом, модель Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья для антиканонического сечения торического многообразия можно описать как антиканоническое сечение в двойственном торическом

многообразии. Оказывается, для такой двойственности выполняется зеркальная симметрия и на уровне чисел Ходжа. А именно, рассмотрим горенштейново торическое многообразие T и двойственное ему торическое многообразие T^\vee (иными словами, многообразия T и T^\vee определяются двойственными целочисленными многогранниками). Пусть X — полное пересечение Калаби–Яу в T размерности n , определяемое некоторым неф-разбиением. Батырев и Борисов (см. [BV96]) определили двойственное неф-разбиение, которое определяет двойственное многообразие Калаби–Яу Y . Они показали, что

$$h_{st}^{p,q}(X) = h_{st}^{p,n-q}(Y),$$

где $h_{st}^{p,q}(X)$ — струнные числа Ходжа (в частности, в нашем случае они совпадают с числами Ходжа крепантного разрешения многообразия X , которые, по теореме Батырева (см. [Ba99]), не зависят от конкретного разрешения). Для многообразий Фано таких равенств напрямую написать нельзя, так как двойственным объектом для них будут не многообразия, а семейства многообразий. В работе [KKP17] были (тремя способами) определены так называемые адаптированные числа Ходжа для “вручную компактифицированных моделей Ландау–Гинзбурга” и выдвинута гипотеза о зеркальном соответствии чисел Ходжа для них. В настоящей работе, в частности, мы изучаем эти гипотезы, подкорректировав их и доказав для случая поверхностей дель Пеццо.

Ожидается, что разные версии гипотез зеркальной симметрии согласованы друг с другом. Это значит, что для предложенных Гивенталем моделей Ландау–Гинзбурга должна выполняться и гипотеза гомологической зеркальной симметрии. Более точно, должен быть выполнен следующий компактификационный принцип: должна существовать послойная компактификация моделей Ландау–Гинзбурга, которая, после необходимого оснащения симплектической формой, удовлетворяет гипотезе гомологической зеркальной симметрии. В частности, слоями для такой компактификации должны быть многообразия Калаби–Яу, зеркально двойственные антиканоническим

сечениям многообразия Фано. Эти три свойства (соответствие инвариантов Громова–Виттена периодам, существование компактификации до семейства многообразий Калаби–Яу и связь с торическими вырождениями) и легли в основу следующего понятия, которое является центральным для данной работы.

Определение. Рассмотрим пару, состоящую из гладкого многообразия Фано X размерности n и дивизора D на нем. Этому дивизору соответствует орбита антиканонического направления на торе $\text{Spes } \mathbb{C}_q$, который можно рассматривать как тор, параметризованный базисом решетки $\text{Pic}(X)$. Пусть $\tilde{I}_0^{X,D} \in \mathbb{C}[[t]]$ — свободный член, то есть коэффициент при $\mathbf{1} \in H^*(X)$, ограничения регуляризованного I -ряда для X на эту орбиту. *Торической моделью Ландау–Гинзбурга* для пары (X, D) называется многочлен Лорана f от n переменных, удовлетворяющий следующим условиям.

Условие периодов: Выполнено равенство $\tilde{I}_0^{X,D} = \sum [f^i]_0 t^i$.

Условие Калаби–Яу: Существует относительная компактификация семейства слоев морфизма

$$f: (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C},$$

тотальным пространством которого является (некомпактное) гладкое многообразие Калаби–Яу Y .

Торическое условие: Существует вырождение $X \rightsquigarrow T_X$ к торическому многообразию T_X , веерный многогранник которого совпадает с многогранником Ньютона для многочлена f .

Многочлен Лорана, удовлетворяющий условию периодов, называется *слабой моделью Ландау–Гинзбурга*. Кроме того, мы часто дополнительно будем

требовать существование компактификации *лог-Калаби–Яу*, то есть компактификации до семейства над \mathbb{P}^1 , тотальное пространство которого является гладким, а антиканонический класс является слоем.

Усиленная гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа утверждает, что для каждого гладкого многообразия Фано такая торическая модель Ландау–Гинзбурга существует.

В данной работе мы строим торические модели Ландау–Гинзбурга для большого класса многообразий Фано, таких как поверхности дель Пеццо и трехмерные многообразия Фано, полные пересечения во (взвешенных) проективных пространствах и грассманианах, а также строим их компактификации и изучаем их свойства, инварианты и связанные с ними гипотезы.

Основные результаты диссертации кратко можно сформулировать следующим образом.

- Предъявлена явная конструкция торических моделей Ландау–Гинзбурга для поверхностей дель Пеццо и выбранных дивизоров на них.
- Для поверхностей дель Пеццо подкорректированы и доказаны гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева о зеркальной симметрии чисел Ходжа. А именно, показано, что из трех наборов определенных этими авторами чисел Ходжа для моделей Ландау–Гинзбурга один не может удовлетворять зеркальной симметрии, а другой необходимо подкорректировать (изменив градуировку) и наложить для него некоторое условие на модель Ландау–Гинзбурга (она должна иметь тип Фано). Далее доказаны подкорректированные гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева для поверхностей дель Пеццо.
- Детально изучены торические модели Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано. А именно, построены компактификации Калаби–Яу для торических моделей Ландау–Гинзбурга типа Минковского и

для многообразий Фано, не имеющих моделей типа Минковского, и описан их слой над бесконечностью. Явно построены торические вырождения, соответствующие торическим моделям Ландау–Гинзбурга, для случая трехмерных многообразий Фано основной серии. Явно вычислены поляризации слоев моделей Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано основной серии. Тем самым показано, что эти слои являются поверхностями Шиоды–Инозе, периоды соответствуют модулярным формам соответствующего уровня, а компактифицированные модели Ландау–Гинзбурга, слои которых двойственны антиканоническим сечениям многообразия Фано, единственны.

- Построены торические модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в проективных пространствах.
- Построены слабые модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах. А именно, показано, что модели Ландау–Гинзбурга для этих многообразий, построенные Батыревым, Кимом, ван Стратеном и Чиокан-Фонтанином, бирациональны тору, так что потенциал для них является многочленом Лорана, удовлетворяющим условию периодов.
- Сформулирована гипотеза, связывающая число Ходжа $h^{1,n-1}(X)$ многообразия Фано X размерности n и числа компонент приводимых слоев его модели Ландау–Гинзбурга. Эта гипотеза доказана для компактификаций Калаби–Яу торических моделей Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано основной серии и для полных пересечений.

- Найдена новая структура на множестве семейств гладких многообразий Фано. А именно, определены базовые линки, связывающие элементарными проекциями торические вырождения трехмерных многообразий Фано. Приведен пример того, как такие линки связывают многообразия Фано основной серии.
- Показано, что для гладких взвешенных полных пересечений дивизоров Картье и для гладких взвешенных полных пересечений Фано коразмерности не больше двух существует хорошее неф-разбиение. Тем самым показано, что такие многообразия имеют слабые модели Ландау–Гинзбурга.

Теперь опишем содержание и структуру диссертации. Во введении обоснована актуальность темы исследования, кратко рассмотрена история задач и их современное состояние, сформулированы основные результаты и описано содержание работы.

В первой части даются определения и приводятся конструкции, которые требуются для дальнейшего. А именно, в первом параграфе мы даем определение инварианта Громова–Виттена рода ноль для классов когомологий $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in H^*(X)$ на гладком многообразии X как числа

$$\langle \tau_{a_1} \gamma_1, \dots, \tau_{a_n} \gamma_n \rangle_\beta = \psi_1^{a_1} ev_1^*(\gamma_1) \cdot \dots \cdot \psi_n^{a_n} ev_n^*(\gamma_n) \cdot [\bar{M}_n(X, \beta)]^{\text{virt}},$$

если $\sum \text{codim } \gamma_i + \sum a_i = \text{vdim } \bar{M}_n(X, \beta)$. Здесь ψ_i — кокасательные линейные классы на стеке Делиня–Мамфорда $\bar{M}_n(X, \beta)$ стабильных отображений рациональных кривых с отмеченными точками, ev_i — забывающие отображения, а $[\bar{M}_n(X, \beta)]^{\text{virt}}$ — виртуальный фундаментальный класс виртуальной размерности $\text{vdim } \bar{M}_n(X, \beta) = \dim X - K_X \cdot \beta + n - 3$. В случае, когда все числа a_i равны нулю, эти инварианты называются примарными и являются ожидаемыми числами рациональных кривых из класса β , лежащих на X и пересекающих общие представители классов гомологий, соответствующих γ_j .

В частности, примарные трехточечные инварианты Громова–Виттена задают кольцо квантовых когомологий, которое является деформацией обычного кольца когомологий.

Во втором пункте этого параграфа определены I -ряды. А именно, одноточечные инварианты Громова–Виттена можно “упаковать” в I -ряд

$$I^X(q_1, \dots, q_\rho) = 1 + \sum_{\beta \in K} \sum_{i, j \geq 0} \langle \tau_i \mu_j \rangle_{\beta} \check{\mu}_j q^\beta,$$

где сумма берется по всем кривым из множества эффективных кривых K и базису μ_1, \dots, μ_N в $H^*(X)$, так что $\check{\mu}_1, \dots, \check{\mu}_N$ — двойственный базис. Этот ряд лежит в пополнении пространства $H^*(X) \otimes \mathbb{C}_q$, где \mathbb{C}_q — кольцо Новикова, определенное следующим образом. Рассмотрим базис $\{H_1, \dots, H_\rho\}$ в пространстве $H^2(X)$, состоящий из численно эффективных дивизоров. Введем формальные переменные q и σ_i , $1 \leq i \leq \rho$, и положим $q_i = q^{\sigma_i}$. Для любой кривой $\beta \in H_2(X)$ обозначим

$$q^\beta = q^{\sum \sigma_i (H_i \cdot \beta)}.$$

Кольцо Новикова определяется как кольцо многочленов над \mathbb{C} от формальных переменных q^β с соотношениями

$$q^{\beta_1} q^{\beta_2} = q^{\beta_1 + \beta_2}.$$

Заметим, что для любой кривой $\beta \in K = NE_1(X) \cap H_2(X, \mathbb{Z})$ моном q^β имеет неотрицательную степень по всем переменным q_i . Нас будет интересовать регуляризация свободного члена, то есть коэффициента при $\mathbf{1} \in H^*(X)$, этого I -ряда

$$\tilde{I}_0^X(q_1, \dots, q_\rho) = 1 + \sum_{\beta \in K} (-K_X \cdot \beta)! \langle \tau_{-K_X \cdot \beta - 2} \mathbf{1} \rangle_{\beta} \cdot q^\beta.$$

Он является решением регуляризованного квантового дифференциального уравнения для X . Кроме того, чаще всего мы будем рассматривать ограничение этого ряда на орбиту антиканонического направления на торе $\text{Spec } \mathbb{C}_q$,

которая соответствует выбранному на X дивизору D ; такой ряд получается из последнего ряда заменой q^β на $e^{-D \cdot \beta t - K_X \cdot \beta}$.

Второй параграф первой части посвящен базовым определениям и свойствам торических многообразий. В частности, там отмечено, что если такое многообразие факториально, то решетку, двойственную к решетке Пикара, можно отождествить с решеткой соотношений на целочисленные порождающие лучей веера торического многообразия. Таким образом, базису в решетке Пикара соответствует базис в решетке соотношений на эти порождающие.

Во второй части мы даем приведенное выше определение торической модели Ландау–Гинзбурга и обсуждаем ее свойства. Мы выделили это определение и обсуждение ввиду того, что понятие торической модели Ландау–Гинзбурга является центральным в настоящей работе. В частности, в этой части изучены периоды для семейства слоев торической модели Ландау–Гинзбурга и приведена следующая гипотеза.

Гипотеза 2.10. Любая пара (X, D) , состоящая из гладкого многообразия Фано и дивизора на нем, имеет торическую модель Ландау–Гинзбурга (в смысле определения на странице 11).

Она позволяет надеяться, что имеет место следующая картина.

Оптимистическая картина 2.12. Торические вырождения многообразий Фано взаимно однозначно соответствуют торическим моделям Ландау–Гинзбурга. Для них выполнен компактификационный принцип.

Третья часть посвящена зеркальной симметрии для поверхностей дель Пеццо. Напомним, что Паскуале дель Пеццо определил их как невырожденные поверхности степени n в \mathbb{P}^n . Таким образом, их можно получить друг из друга проекцией из лежащих на них точек. В частности, если эти точки достаточно общие, мы получим классическое описание всех (за исключением квадрики, которую следует рассмотреть отдельно, и поверхностей дель Пеццо степеней 1 и 2, антиканонический класс которых не очень обилен)

гладких поверхностей дель Педро как раздутий точек на плоскости \mathbb{P}^2 . Образом проекций из особых точек будут поверхности дель Педро с каноническими особенностями, так как через такую точку могут проходить прямые, которые стянутся при проекции. Выбирая в качестве центров проекций торинвариантные точки, мы получим горенштейновы торические вырождения поверхностей дель Педро. В первом параграфе части показано, что этим вырождениям соответствуют торические модели Ландау–Гинзбурга (и тем самым подтверждена гипотеза 2.10 в этом случае). С другой стороны, можно рассмотреть базис в группе Пикара гладкой поверхности дель Педро, состоящий из собственного прообраза прямой на \mathbb{P}^2 и исключительных дивизоров. В параграфе 3.1 выписаны торические модели Ландау–Гинзбурга для поверхностей дель Педро и дивизоров на них в терминах координат таких дивизоров в выбранном базисе. Это позволяет явно построить и изучить компактифицированные модели Ландау–Гинзбурга, соответствующие этим дивизорам. Кроме того, в этом же параграфе построены естественные компактификации лог-Калаби–Яу для торических моделей Ландау–Гинзбурга. Слоем над бесконечностью для такой компактификации является колесо гладких рациональных кривых (количество которых зависит от степени поверхности дель Педро). Это описание согласуется с описанием моделей Ландау–Гинзбурга поверхностей дель Педро и общих дивизоров на них, которое дано в [АКО06].

Второй параграф третьей части посвящен гипотезам Кацаркова–Концевича–Пантева для поверхностей дель Педро. А именно, пусть (Y, w) — модель Ландау–Гинзбурга для такой поверхности, а Z — ее ручная компактификация с дивизором на бесконечности D_Z . Тогда числа Ходжа модели Ландау–Гинзбурга $f^{p,q}(Y, w)$ определяются через

$$f^{p,q}(Y, w) = \dim H^p(Z, \Omega_Z^q(\log D_Z, f)).$$

Числа Ходжа модели Ландау–Гинзбурга $h^{p,q}(Y, w)$ определяются следующим образом:

$$h^{p,n-q}(Y, w) = \dim gr_{2(n-p)}^{W(N,n-a)} H^{n+p-q}(Y, Y_b) \quad \text{если } a = p - q \geq 0,$$

$$h^{p,n-q}(Y, w) = \dim gr_{2(n-q)}^{W(N,n+a)} H^{n+p-q}(Y, Y_b) \quad \text{если } a = p - q < 0.$$

Здесь $W(N, n + a)$ — весовая фильтрация, центрированная в $n + a$ для логарифма N оператора монодромии в окрестности бесконечности, действующем в относительных когомологиях $H^{n+p-q}(Y, Y_b)$ гладкого слоя Y_b . Для того, чтобы определение (а точнее, связанная с ним гипотеза) было корректно, на оператор N требуется наложить некоторое условие — он должен иметь тип Фано. Другое отличие этого определения от данного в [ККР17] является поправка в градуировке. Мотивация этого определения состоит в том, что по гипотезе гомологической зеркальной симметрии оператор N соответствует умножению на антиканонический класс в когомологиях многообразия Фано, которому соответствует модель Ландау–Гинзбурга. Третьи числа $i^{p,q}(Y, w)$ определяются через смешанные структуры Ходжа для пучка исчезающих циклов к особым слоям. Гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева утверждают, что, во-первых, эти наборы чисел совпадают, а, во-вторых, что

$$f^{p,q}(Y, w) = h^{p,n-q}(X),$$

где (Y, w) — модель Ландау–Гинзбурга многообразия X , $\dim(X) = \dim(Y) = n$.

В третьем параграфе части для поверхностей дель Пеццо показано, что эти гипотезы не могут быть выполнены, по тривиальным причинам, для чисел $i^{p,q}(Y, w)$, а для остальных чисел эти гипотезы доказаны. Для того, чтобы найти нужные числа, в параграфе 3.2 изучена топология эллиптических пучков.

Четвертая часть посвящена изучению моделей Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано; она является центральной в данной работе. В первом параграфе данной части обсуждаются слабые модели Ландау–Гинзбурга для таких многообразий, то есть многочлены Лорана, удовлетворяющие условию периодов. Если многообразие Фано имеет очень обильный антиканонический класс, то такие многочлены можно построить, изучив его горенштейновы торические вырождения и сопоставив им, согласно принципу Минковского, многочлены Лорана. Случай не очень обильного канонического класса рассмотрен отдельно.

Во втором параграфе четвертой части построены компактификации лог-Калаби–Яу для слабых моделей Ландау–Гинзбурга типа Минковского. Естественной компактификацией является компактификация в торическом многообразии, двойственном тому, которое определяется многочленом Лорана. Слои модели Ландау–Гинзбурга компактифицируются в нем до элементов антиканонического пучка и, таким образом, имеют тривиальный антиканонический класс. Оказывается, что если для коэффициентов многочлена Лорана выполнено условие Минковского, то базисным множеством такого пучка является объединение гладких кривых (возможно, с кратностями). Раздутие этого базисного множества и дает требуемое семейство поверхностей типа КЗ, антиканоническим классом которого является слой. Эта конструкция дает описание слоя над бесконечностью модели Ландау–Гинзбурга как граничного дивизора двойственного торического многообразия. Наконец, случаи, когда многообразие Фано не имеет очень обильного антиканонического класса и модели Ландау–Гинзбурга типа Минковского, рассмотрен отдельно.

Известно (см. [DNKLP] и [IKKPS]), что изучаемые нами слабые модели Ландау–Гинзбурга соответствуют торическим вырождениям и, таким образом, являются торическими. В третьем параграфе мы явно строим торические вырождения для многообразий Фано основной серии. Для этого мы

пользуемся общей теоремой для (взвешенных) полных пересечений из параграфа 5.4 и теорией схем Стенли–Райзнера.

Наконец, последний параграф четвертой части посвящен вычислению решеток Пикара для компактифицированных моделей Ландау–Гинзбурга. Напомним, что общее антиканоническое сечение многообразия Фано индекса i и степени ik^3 с одномерной решеткой Пикара является поверхностью типа КЗ, поляризованной одномерной решеткой $\langle 2n \rangle$, где $2n = ik$. По двойственности Долгачева–Никулина (зеркальной двойственности для поверхностей типа КЗ), слои двойственной модели Ландау–Гинзбурга должны иметь поляризацию

$$M_k = H \oplus E_8(-1) \oplus E_8(-1) + \langle -2n \rangle,$$

где H — гиперболическая решетка. Такие поверхности являются поверхностями Шиоды–Инозе, то есть куммеровыми поверхностями, соответствующими произведениям эллиптической кривой на n -изогенную, а их (грубыми) пространствами модулей являются универсальные семейства над модулярной кривой. В последнем параграфе мы явно вычисляем решетки Пикара слоев моделей Ландау–Гинзбурга и проверяем, что для них выполнена двойственность Долгачева–Никулина. Для этого мы используем два метода. Первый заключается в том, что мы описываем интересующие нас слои как разрешения особых кватрик и находим на них достаточно большое число кривых (многие из них, в частности, являются исключительными кривыми разрешения). Найдя матрицу пересечения этих кривых мы убеждаемся, что они образуют подрешетку конечного индекса в решетке Пикара. Далее мы пользуемся некоторыми утверждениями о решетках большого ранга, чтобы убедиться, что найденная решетка совпадает с решеткой Пикара. Другим методом является нахождение на слоях структур эллиптического пучка с сечением. Далее мы пользуемся теоремами, описывающими решетки Пикара таких пучков через их особые слои и группу Морделла–Вейля. В качестве следствия наших

вычислений мы получаем, что если трехмерная модель Ландау–Гинзбурга для трехмерного многообразия Фано основной серии удовлетворяет условию Долгачева–Никулина, то такая модель единственна (с точностью до флопов) и совпадает с построенной нами.

Пятая часть посвящена торическим моделям Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в проективных пространствах. В первом параграфе мы в деталях приводим конструкцию Гивенталья для моделей Ландау–Гинзбурга полных пересечений в гладких торических многообразиях. Во втором параграфе мы рассматриваем случай полных пересечений в проективных пространствах. Мы представляем модели Гивенталья многочленами Лорана и находим их периоды (в частности, мы показываем, что эти периоды совпадают с интегралом Гивенталья), тем самым проверяя условия периодов. В третьем параграфе мы строим компактификации лог-Калаби–Яу найденных многочленов Лорана. Метод, который мы используем, аналогичен методу из параграфа 4.2. Наконец, в последнем, четвертом параграфе мы строим торические многообразия, соответствующие полученным слабым моделям Ландау–Гинзбурга для полных пересечений во (взвешенных) проективных пространствах. Оказывается, они задаются как (образы при отображении Веронезе) полных пересечений гиперповерхностей тех же степеней, что и исходное полное пересечение, а, значит, являются их вырождениями. Как итог рассуждений этой части получаем, что полные пересечения имеют торические модели Ландау–Гинзбурга.

Шестая часть посвящена моделям Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах. Батырев, Ким, ван Стратен и Чиокан-Фонтанин в работах [BCFKS97] и [BCFKS98] рассмотрели горенштейново терминальное торическое вырождение грассманиана и предъявили наборы граничных дивизоров такого вырождения, линейно эквивалентные гиперплоскому сечению. Это позволяет найти большое число неф-разбиений для полного пересечения в грассманиане и построить модель Ландау–Гинзбурга, повторяя аналог

конструкции Гивенталья. В первом параграфе мы показываем, что некоторые такие модели бирациональны алгебраическому тору и, таким образом, задаются многочленом Лорана. Для этого мы выбираем некоторое специальное неф-разбиение. Во втором параграфе части мы находим интеграл Гивенталья, проверяя, тем самым, условие периодов.

Гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева позволяют восстановить числа Ходжа многообразия Фано X размерности n , исходя из его моделей Ландау–Гинзбурга. Однако как мы видели в параграфе 3.2, сделать это не так просто. В седьмой части мы формулируем гипотезу, которая позволяет восстановить одно из чисел Ходжа гораздо проще. Пусть LG_X — послойно компактная модель Ландау–Гинзбурга для многообразия X и тривиального (то есть равного нулю) дивизора на нем. Определим число k_{LG_X} как разность числа неприводимых компонент приводимых слоев для LG_X и числа самих приводимых слоев. Гипотеза заключается в том, что $h^{1,n-1}(X) = k_{LG_X}$. (Заметим, что в трехмерном случае это число Ходжа является единственным нетривиальным.) В этой части мы проверяем эту гипотезу для случая трехмерных многообразий Фано основной серии, вручную строя их компактификации Калаби–Яу (к сожалению, компактификации, построенные в параграфе 4.2, почти не дают информации об особых слоях моделей Ландау–Гинзбурга) и для полных пересечений, также итеративно строя компактификации Калаби–Яу для них.

Как уже упоминалось выше, гладкие поверхности дель Пеццо получаются друг из друга проекциями из достаточно общих точек. Рассматривая проекции из торических точек, можно построить торические вырождения поверхностей дель Пеццо и восстановить гладкие поверхности, деформируя торические, так как поверхности дель Пеццо, за исключением случая степени 8,

образуют неприводимые семейства для каждой фиксированной степени. Такая связь между поверхностями дель Пеццо через элементарные перестройки (проекции) их торических вырождений хорошо вписывается в теорию их торических моделей Ландау–Гинзбурга. Эта картина описана в первом параграфе восьмой части.

Гладкие трехмерные многообразия Фано классифицированы (см. [Is77] и [MM82]), однако, к сожалению, описание семейств, которые они образуют, разнородно. Основной мотивацией восьмой части является попытка увидеть некоторую структуру на множестве семейств трехмерных многообразий Фано. Во втором параграфе части дана конструкция такой структуры и приведен пример для случая многообразий Фано основной серии (общий случай отличается от этого лишь громоздкостью и изучен в [KKPS]). К сожалению, многообразия Фано нельзя, по аналогии с двухмерным случаем, связать друг с другом проекциями, хотя бы потому, что многие многообразия не бирационально эквивалентны. Поэтому мы связываем элементарными преобразованиями не сами многообразия, а их торические вырождения, восстанавливая потом многообразия Фано как сглаживания торических. Эти преобразования определяют элементарные перестройки (например, добавление одного монома) соответствующих торических моделей Ландау–Гинзбурга. Более того, эти модели “помнят” многообразие Фано, к которому должно быть сглажено торическое многообразие, что важно, так как одно и то же торическое многообразие может быть вырождением разных семейств многообразий Фано. Более точно, мы определяем так называемые базовые линки, которые геометрически описываются либо как проекция (в полуантиканоническом вложении) из гладкой точки многообразия, либо как проекция из двойной точки, либо как проекция из прямой (не лежащей целиком в особом множестве многообразия), либо как проекция из коники (не лежащей целиком в особом множестве

многообразия). Мы приводим некоторые (достаточно слабые) условия, гарантирующие, что такие проекции являются бирациональными эквивалентностями; эти условия выполнены для торических многообразий. Как результат мы получаем картину, в которой многообразия Фано основной серии “выстраиваются в две цепочки”, см. рисунок 5. Первая цепочка соответствует многообразиям индекса 1, а вторая — многообразиям индекса 2. Кроме того, эти цепочки соединены, а также с ними соединены пространство \mathbb{P}^3 (которое можно рассматривать как многообразие полуиндекса 2) и квадрика.

Наконец, девятая часть посвящена вопросу существования неф-разбиений для гладких взвешенных полных пересечений Фано. Напомним, что в случае полных пересечений в грассманианах (часть 6) такие неф-разбиения легко находились, а основной проблемой было нахождение бирационального изоморфизма модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья с тором. Для взвешенных полных пересечений картина противоположна: неизвестно, всегда ли существует (“хорошее”) неф-разбиение, но как только оно найдено, модель Ландау–Гинзбурга, аналогичную модели Гивенталья, несложно представить многочленом Лорана. В первом параграфе части рассмотрен случай полных пересечений дивизоров Картье. В этом случае существуют сильные численные ограничения (например, делимость любой степени на любой вес), которые и позволяют доказать существование хорошего неф-разбиения. В частности, оно существует для гладких гиперповерхностей.

Во втором параграфе части доказано существование неф-разбиения для случая полных пересечений коразмерности 2. Для доказательства вводятся некоторые новые структуры — графы специального вида, вершины которых помечены числами, и специальные функции на этих графах. Графы кодируют взвешенные проективные пространства, учитывая условие существования в них гладких полных пересечений Фано. Изучая структуру таких графов, мы строим необходимое хорошее неф-разбиение.

Гипотеза 9.1 утверждает, что неф-разбиение существует для любого гладкого взвешенного полного пересечения Фано. Первые два параграфа девятой части подтверждают эту гипотезу в некоторых частных случаях. Третий параграф посвящен подтверждению гипотезы еще в одном случае. А именно, в нем перечислены все гладкие полные пересечения размерностей 4 и 5 (найденные в [PSh16a]) и все неф-разбиения для них.

Автор выражает глубокую благодарность своим коллегам и соавторам В. В. Голышеву, Н. Илтену, А. Каспрчику, Л. Кацаркову, А. Корти, А. Г. Кузнецову, В. А. Лунцу, Д. О. Орлову, Э. Хардеру, И. А. Чельцову, К. А. Шрамову и многим другим за неоценимую помощь в работе.

СОГЛАШЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Все многообразия считаются определенными над полем комплексных чисел \mathbb{C} .

Под инвариантами Громова–Виттена мы будем подразумевать только инварианты *рода ноль*.

Гомологии $H_*(X, \mathbb{Z})$ и когомологии $H^*(X, \mathbb{Z})$ мы будем обозначать через $H_*(X)$ и $H^*(X)$ соответственно. Когомологии с компактным носителем (многообразия X с коэффициентами в постоянном пучке \mathbb{C}_X) мы будем обозначать через $H_c^*(Y)$. Двойственный по Пуанкаре класс к классу $\gamma \in H^*(X)$ мы будем обозначать через γ^\vee . Пространство $\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{C}$ мы будем обозначать через $\text{Pic}(X)_{\mathbb{C}}$.

Для двух чисел n_1 и n_2 множество $\{i \mid n_1 \leq i \leq n_2\}$ мы будем обозначать через $[n_1, n_2]$.

Под многообразиями Калаби–Яу мы будем иметь в виду проективные многообразия с тривиальным каноническим классом.

Одним и тем же символом мы часто будем обозначать дивизор (Картье) на многообразии X и его класс в $\text{Pic}(X)$.

Гладкую поверхность дель Пеццо степени d (за исключением квадрики) мы будем обозначать через S_d .

Через X_{k-m} мы будем обозначать гладкое многообразие Фано (рассматриваемое как элемент семейства многообразий Фано этого типа) с рангом Пикара k и номером m в списках из [IP99]. Пропущенное многообразие ранга Пикара 4 и степени 26 мы будем обозначать через X_{4-2} и сдвигать индексы многообразий такого же ранга Пикара и большей степени.

Мы обозначим через $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ взвешенное проективное пространство с весами w_0, \dots, w_n . (Взвешенное) проективное пространство с координатами x_0, \dots, x_n мы обозначаем через $\mathbb{P}[x_0 : \dots : x_n]$. Аффинное пространство с координатами x_0, \dots, x_n мы обозначаем через $\mathbb{A}[x_1, \dots, x_n]$.

Кольцо $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ обозначается через $\mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$.

Целочисленным многогранником $\Delta \in \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}$ мы будем называть многогранник, вершины которого целые, то есть лежат в \mathbb{Z}^n .

Мы рассматриваем пучок в бирациональном смысле: пучок для нас — семейство, бирациональное семейству слоев морфизма на \mathbb{P}^1 .

Часть 1. Предварительные сведения.

1.1. ИНВАРИАНТЫ ГРОМОВА–ВИТТЕНА И I -РЯДЫ

1.1.1. **Инварианты Громова–Виттена.** Аксиоматическое определение *примарных инвариантов* было дано Концевичем и Маниным в [KM94]. *Инварианты с потомками* были определены и построены в [VM96]. Основной ссылкой для определений будет книга [Ma02].

Рассмотрим гладкое многообразие X .

Определение 1.1 ([Ma02, V–1.3.2]). Пусть C — кривая с n отмеченными точками. Отображение кривой $f: C \rightarrow X$ называется *стабильным*, если она в качестве особенностей имеет самое большее обыкновенные двойные точки, отмеченные точки являются гладкими, а отображение f допускает лишь конечное число инфинитезимальных автоморфизмов (другими словами, на каждой стягиваемой компоненте C лежит не менее трех отмеченных или особых точек). Мы будем отождествлять отображения $(f, C, \{p_i\})$ и $(f', C', \{p'_i\})$, если существует отображение $h: C \rightarrow C'$, такое что $h(p_i) = p'_i$ и $f = f' \circ h$.

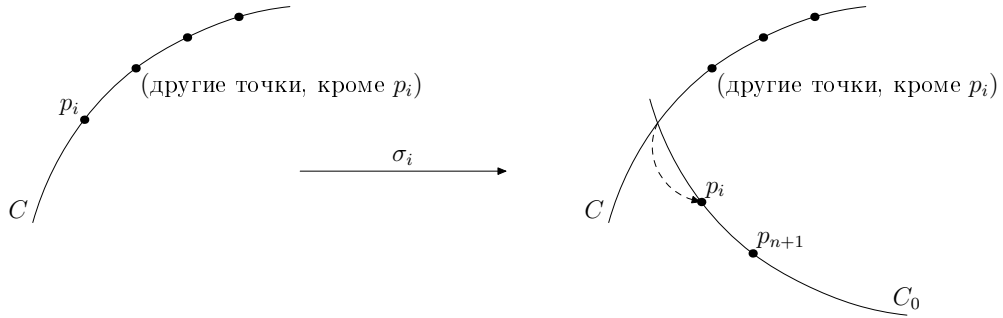
Определение 1.2 ([Ma02, V–3.3.2]). *Пространством модулей отображений* рациональных кривых класса $\beta \in H_2(X)$ с n отмеченными точками $\bar{M}_n(X, \beta)$ называется стек Делиня–Мамфорда (см. [Ma02, V–5.5]) стабильных отображений кривых рода ноль с n отмеченными точками $f: C \rightarrow X$, таких что $f_*(C) = \beta$.

Общей точкой этого стека является отображение $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$, на границе эти отображения вырождаются в отображения приводимых кривых.

Определение инвариантов Громова–Виттена дается в терминах теории пересечений на стеках $\bar{M}_n(X, \beta)$, которую можно ввести благодаря тому, что локально они являются фактором гладкого многообразия по конечной группе. Однако эти стеки не всегда имеют ожидаемую размерность. Чтобы корректно

оперировать с произведениями кохомологических циклов на них, необходимо ввести *виртуальный фундаментальный класс* $[\bar{M}_n(X, \beta)]^{\text{virt}}$ виртуальной размерности $\text{vdim } \bar{M}_n(X, \beta) = \dim X - K_X \cdot \beta + n - 3$ (его конструкцию см. в [Ma02, VI–1.1]).

Рассмотрим отображения $ev_i: \bar{M}_n(X, \beta) \rightarrow X$, $ev_i(C; p_1, \dots, p_n, f) = f(p_i)$. Пусть $\pi_{n+1}: \bar{M}_{n+1}(X, \beta) \rightarrow \bar{M}_n(X, \beta)$ — морфизм, забывающий точку p_{n+1} (и стягивающий компоненты, которые становятся нестабильными при забывании p_{n+1}), а $\sigma_i: \bar{M}_n(X, \beta) \rightarrow \bar{M}_{n+1}(X, \beta)$ — сечение, соответствующее отмеченной точке p_i , построенное следующим образом. Образом кривой $(C; p_1, \dots, p_n, f)$ при отображении σ_i будет кривая $(C'; p_1, \dots, p_{n+1}, f')$, где $C' = C \cup C_0$, $C_0 \cong \mathbb{P}^1$, C_0 и C пересекаются в (не отмеченной на C') точке p_i , а точки p_{n+1} и новая p_i лежат на C_0 . При этом f' стягивает C_0 в точку, а $f'|_C = f$.



Пусть $L_i = \sigma_i^* \omega_{\pi_{n+1}}$, где $\omega_{\pi_{n+1}}$ — относительный дуализирующий пучок π_{n+1} . Слоем L_i над точкой $(C; p_1, \dots, p_n, f)$ является $T_{p_i}^* C$.

Определение 1.3 (см. [Ma02, VI–2.1]). *Кокасательным линейным классом* называется класс

$$\psi_i = c_1(L_i) \in H^2(\bar{M}_n(X, \beta)).$$

Определение 1.4 ([Ma02, VI–2.1]). Рассмотрим классы кохомологий

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n \in H^*(X).$$

Пусть a_1, \dots, a_n — неотрицательные целые числа и $\beta \in H_2(X)$. Тогда *инвариант Громова–Виттена с потомками*, соответствующий этому набору,

есть

$$\langle \tau_{a_1} \gamma_1, \dots, \tau_{a_n} \gamma_n \rangle_\beta = \psi_1^{a_1} ev_1^*(\gamma_1) \cdot \dots \cdot \psi_n^{a_n} ev_n^*(\gamma_n) \cdot [\bar{M}_n(X, \beta)]^{\text{virt}},$$

если $\sum \text{codim } \gamma_i + \sum a_i = \text{vdim } \bar{M}_n(X, \beta)$, и 0 иначе. Если все $a_i = 0$, то такие инварианты называются *примарными* и равны ожидаемому количеству рациональных кривых класса β на X , пересекающих циклы, двойственные классам $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Символы τ_0 мы будем опускать.

1.1.2. *I-ряды*. Для того, чтобы оперировать с инвариантами Громова–Виттена, их “пакуют” в различные структуры. Простейшие инварианты — одноточечные ($n = 1$); их принято записывать с помощью *I-рядов*.

Пусть гладкое многообразие Фано X размерности N имеет число Пикара ρ . Выберем базис

$$\{H_1, \dots, H_\rho\}$$

в пространстве $H^2(X)$, такой, что для каждого номера $i \in [1, \rho]$ и любого класса β в конусе эффективных кривых K на многообразии X выполнено $H_i \cdot \beta \geq 0$. Введем формальные переменные q и σ_i , $i \in [1, \rho]$, и положим $q_i = q^{\sigma_i}$. Для любой кривой $\beta \in H_2(X)$ обозначим

$$q^\beta = q^{\sum \sigma_i (H_i \cdot \beta)}.$$

Рассмотрим кольцо Новикова \mathbb{C}_q , то есть групповое кольцо для $H_2(X)$. Мы будем рассматривать это кольцо как кольцо многочленов над \mathbb{C} от формальных переменных q^β с соотношениями

$$q^{\beta_1} q^{\beta_2} = q^{\beta_1 + \beta_2}.$$

Заметим, что для любой кривой $\beta \in K$ моном q^β имеет неотрицательную степень по всем переменным q_i .

Определение 1.5 (подробнее см. в [Gat02], [Prz07a]). Пусть μ_1, \dots, μ_N — базис $H^*(X)$, а $\check{\mu}_1, \dots, \check{\mu}_N$ — двойственный базис. Тогда I -ряд (или J -ряд Гивенталя) для X задается следующим образом.

$$I_\beta^X = ev_* \left(\frac{1}{1-\psi} \cdot [\bar{M}_1(X, \beta)]^{\text{virt}} \right) = \sum_{i,j \geq 0} \langle \tau_i \mu_j \rangle_\beta \check{\mu}_j,$$

$$I^X(q_1, \dots, q_\rho) = 1 + \sum_{\beta \in K} I_\beta^X \cdot q^\beta.$$

Свободным членом I -ряда I_0^X называется функция

$$I_0^X(q_1, \dots, q_\rho) = 1 + \sum_{\beta \in K} \langle \tau_{(-K_X) \cdot \beta - 2} \mathbf{1} \rangle_\beta \cdot q^\beta,$$

где через $\mathbf{1}$ обозначен фундаментальный класс. (Для одноточечных инвариантов отображение ev и кокасательный линейный класс единственны, и мы опускаем их индексы.) Ряд

$$\tilde{I}_0^X(q_1, \dots, q_\rho) = 1 + \sum_{\beta \in K} (-K_X \cdot \beta)! \langle \tau_{-K_X \cdot \beta - 2} \mathbf{1} \rangle_\beta \cdot q^\beta$$

называется *свободным членом регуляризованного I -ряда* для многообразия X .

Рассмотрим класс дивизоров $H = \sum \alpha_i H_i$. I -ряды (обычный и регуляризованный) можно ограничить на направление, соответствующее этому дивизору, положив $\sigma_i = \alpha_i \sigma$ и $t = q^\sigma$. Имея класс дивизоров D . Нас будет интересовать ограничение I -рядов на *орбиту антиканонического направления, соответствующего D* , для получения которого необходимо заменить в формулах q^β на $e^{-D \cdot \beta} t^{-K_X \cdot \beta}$. В частности, можно определить *ограничение свободного члена регуляризованного I -ряда на антиканоническое направление* (так что $D = 0$); оно имеет вид

$$\tilde{I}_0^X(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

1.2. ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Определение и основные свойства торических многообразий см. в [Da78] или в [Fu93]. Напомним лишь, что торическое многообразие — это нормальное многообразие размерности N , на котором действует тор $T \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}^*)^N$ так, что одна из орбит этого действия является открытым по Зарискому множеством. Оно характеризуется своим *веером*, то есть некоторым набором конусов с вершинами в точках решетки, двойственной к решетке характеров тора. При этом алгебро-геометрические свойства торического многообразия переформулируются в терминах свойств этого веера.

Напомним некоторые из них.

Каждому конусу веера $\kappa \subset \mathcal{N} = \mathbb{R}^n$ размерности r можно сопоставить орбиту тора размерности $N - r$. Так, каждому ребру веера (одномерному конусу) можно сопоставить (эквивариантный) дивизор Вейля. А именно, пусть $\Sigma \in \mathcal{N} \otimes \mathbb{R}$, $\mathcal{N} = \mathbb{Z}^n$, — веер торического многообразия X_Σ , а $\sigma \in \Sigma$ — произвольный конус. Пусть \mathcal{M} — решетка, двойственная решетке \mathcal{N} , относительно какого-нибудь невырожденного спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а σ^\vee — двойственный конус для σ (то есть $\sigma^\vee = \{l \in \mathcal{M} \mid \langle l, k \rangle \geq 0 \text{ для всех } k \in \sigma\}$). Пусть $U_\sigma = \text{Spec } \mathbb{C}[\sigma^\vee]$ соответствует σ . Многообразие X_σ получается из аффинных многообразий U_σ , $\sigma \in \Sigma$, путем склейки U_σ и U_τ вдоль $U_{\sigma \cap \tau}$, $\sigma, \tau \in \Sigma$. Таким образом, если $l \subset \sigma \in \Sigma$ — ребро веера, то дивизор, соответствующий l , ограничивается на U_σ как $U_l \subset U_\sigma$. Дивизоры, соответствующие ребрам веера, порождают группу классов дивизоров. Дивизор Вейля $D = \sum d_i M_i$, где M_i — дивизоры, соответствующие ребрам веера, является дивизором Картье, если для каждого конуса этого веера σ существует вектор n_σ , такой что $\langle n_\sigma, m_i \rangle = d_i$, где m_i — примитивные элементы ребер конуса. Если такой вектор один для всех конусов, то дивизор является главным. Отсюда, если торическое многообразие N -мерно, а количество ребер его веера равно $N + \rho$, то ранг его группы классов дивизоров равен ρ .

Определение 1.6. Многообразие называется \mathbb{Q} -факториальным, если кратность любого дивизора Вейля на нем является дивизором Картье.

Таким образом, на \mathbb{Q} -факториальном многообразии естественным образом можно построить теорию пересечений для дивизоров Вейля.

Торическое многообразие является \mathbb{Q} -факториальным тогда и только тогда, когда любой конус соответствующего ему веера симплицален. В этом случае его группа Пикара порождена над \mathbb{Q} дивизорами, соответствующими ребрам веера.

Рассмотрим взвешенное проективное пространство $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_N)$. Его веер порождается целочисленными векторами $m_0, \dots, m_N \in \mathbb{R}^N$, такими что $\sum w_i m_i = 0$. Если $w_0 = 1$, то можно взять $m_0 = (-w_1, \dots, -w_N)$, $m_i = e_i$, где e_i — базис в \mathbb{R}^N . При этом набор векторов $\{m_i\}$ соответствует набору стандартных дивизоров-стратов $\{D_i \in |w_i H|\}$.

Торическое многообразие является *гладким*, если для каждого конуса σ соответствующего ему веера полугруппа $\sigma \cap \mathbb{Z}^N$ порождается частью базиса решетки $m_1^\sigma, \dots, m_k^\sigma$. При этом добавлению ребра $a = a_1 m_1^\sigma + \dots + a_k m_k^\sigma$, $a_i \in \mathbb{Q}$, к конусу (и соединению его гранями с “соседними” ребрами) соответствует взвешенное раздутие вдоль подмногообразия, соответствующего σ , с весами $1/r \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ и $a_i = \alpha_i/r$. Добавляя таким образом к вееру ребра, в конце концов можно торически разрешить особенности торического многообразия.

В частности, особым множеством взвешенного проективного пространства $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_N)$ является объединение стратов, задающихся уравнениями вида $x_{i_1} = \dots = x_{i_j} = 0$, где x_{i_j} — координата веса w_{i_j} , а $\{i_1, \dots, i_j\}$ — такое максимальное по включению множество индексов, что наибольший общий делитель остальных больше единицы, см. лемму 9.4.

Рассмотрим факториальное N -мерное торическое многообразие Фано X с рангом группы Пикара ρ , соответствующее вееру Σ_X в решетке \mathcal{M} . Пусть

$D_1, \dots, D_{n+\rho}$ — его неприводимые граничные дивизоры. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{N}^\vee$, и пусть $\mathcal{D} \cong \mathbb{Z}^{N+\rho}$ — решетка с базисом $\{D_1, \dots, D_{N+\rho}\}$ (так что есть естественное отождествление $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}^\vee$). Согласно [CLS11, Theorem 4.2.1], существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow A_{N-1}(X) = \text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}^\rho \rightarrow 0.$$

Используя факториальность многообразия X , отождествим группу классов $A_{N-1}(X)$ и группу Пикара $\text{Pic}(X)$. Точная последовательность, двойственная приведенной выше, имеет вид

$$(1.7) \quad 0 \rightarrow \text{Pic}(X)^\vee \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0.$$

Таким образом, решетка $\text{Pic}(X)^\vee$ может быть отождествлена с решеткой соотношений на примитивные векторы лучей веера Σ_X , рассматриваемые как многочлены Лорана от переменных u_i . С другой стороны, выбрав базис в $\text{Pic}(X)$, можно отождествить $\text{Pic}(X)^\vee$ и $\text{Pic}(X) = H^2(X)$. Таким образом мы можем выбрать базис в решетке соотношений на примитивные векторы веера Σ_X , соответствующие базису $\{H_i\}$ и, таким образом, переменным $\{q_i\}$. Мы будем обозначать эти соотношения через R_i и интерпретировать их как мономы от переменных $u_1, \dots, u_{N+\rho}$. Мы также будем обозначать через D_i образы элементов $D_i \in \mathcal{D}$ в $\text{Pic} X$.

Рассмотрим торическое многообразие T . *Веерным* (или *порождающим*) многогранником $F(T)$ называется выпуклая оболочка целочисленных порождающих лучей веера для многообразия T . Положим

$$\Delta = F(T) \subset \mathcal{M}_{\mathbb{R}} = \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}.$$

Рассмотрим двойственный для Δ многогранник

$$\nabla = \{x \mid \langle x, y \rangle \geq -1 \text{ для всех } y \in \Delta\} \subset \mathcal{M}_{\mathbb{R}} = \mathcal{N}^\vee \otimes \mathbb{R}.$$

Целочисленному многограннику Δ сопоставим (особое) торическое многообразие Фано T_Δ , которое определяется веером, конусы которого являются

конусами над гранями многогранника Δ . Сопоставим также (неоднозначно определенное) торическое многообразие \tilde{T}_Δ с $F(\tilde{T}_\Delta) = \Delta$, такое что для любого торического многообразия T' с $F(T') = \Delta$ и любого морфизма $T' \rightarrow \tilde{T}_\Delta$ имеем $T' \simeq \tilde{T}_\Delta$. Другими словами, многообразие \tilde{T}_Δ получается из “максимальной триангуляции” многогранника Δ .

Определение 1.8. Обозначим T_∇ через T^\vee и \tilde{T}_∇ через \tilde{T}^\vee . Многообразие T и многогранник Δ называется *рефлексивным*, если многогранник ∇ также целочисленен.

Пусть многообразие T рефлексивно. Обозначим T_∇ через T^\vee и \tilde{T}_∇ через \tilde{T}^\vee .

Наконец, приведем некоторые факты о торических многообразиях и их антиканонических сечениях. Детали можно увидеть, например, в [Da78]. Для этого более удобно начинать с торического многообразия T^\vee .

Факт 1.9. Пусть антиканонический класс $-K_{T^\vee}$ очень обилен (в частности, это выполнено для трехмерного рефлексивного случая, см. [JR06] и [CPS05]). Многообразие T^\vee можно следующим образом вложить в проективное пространство. Рассмотрим множество $A \subset \mathcal{M}$ целых точек многогранника Δ , двойственного многограннику $F(T^\vee)$. Рассмотрим проективное пространство \mathbb{P} , координаты x_i которого соответствуют элементам a_i множества A . С каждым однородным соотношением $\sum \alpha_i a_i = \sum \beta_j a_j$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}_+$, свяжем однородное уравнение $\prod x_i^{\alpha_i} = \prod x_j^{\beta_j}$. Многообразие T^\vee высекается в \mathbb{P} уравнениями, соответствующими всем однородным соотношениям на точки a_i .

Факт 1.10. Антиканонической линейной системой многообразия T^\vee является система $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. В частности, она может быть описана как (проективизация) линейной системы многочленов Лорана, многогранники Ньютона которых содержатся в Δ .

Факт 1.11. Торические страты многообразия T^\vee размерности k соответствуют k -мерным граням многогранника Δ . Обозначим через R_f антиканоническое сечение, соответствующее многочлену Лорана $f \in \mathbb{C}[\mathcal{M}]$, а через F_Q страт, соответствующий грани Q многогранника Δ . Обозначим через $f|_Q$ сумму тех мономов многочлена f , чей носитель лежит в Q . Обозначим через \mathbb{P}_Q проективное пространство, координаты в котором соответствуют $Q \cap \mathcal{N}$. (В частности, Q высекается в \mathbb{P}_Q однородными соотношениями на целые точки множества $Q \cap \mathcal{N}$.) Тогда $R_{Q,f} = R_f|_{F_Q} = \{f|_Q = 0\} \subset \mathbb{P}_Q$.

Факт 1.12. В частности, сечение R_f не проходит через торическую точку, соответствующую вершине многогранника Δ тогда и только тогда, когда его коэффициент в этой точке ненулевой. Постоянный многочлен Лорана соответствует граничному дивизору многообразия T^\vee .

Часть 2. Торические модели Ландау–Гинзбурга

Рассмотрим гладкое многообразие Фано X размерности n и дивизор D на нем. Рассмотрим ограничение

$$\tilde{I}_0^{X,D}(t) = 1 + \sum_{\beta \in K, a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (-K_X \beta)! \langle \tau_a \mathbf{1} \rangle_\beta \cdot e^{-\beta \cdot D} t^{-K_X \cdot \beta}$$

свободного члена регуляризованного I -ряда, соответствующее дивизору D .

Рассмотрим тор $\mathbb{T}_{LG} = \mathbb{G}_m^n = \prod_{i=1}^n \text{Spec } \mathbb{C}[x_i^{\pm 1}]$ и функцию f на нем. Эта функция может быть представлена многочленом Лорана: $f = f(x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1})$. Обозначим через $[f]_0$ свободный член (то есть коэффициент при $x_1^0 \cdot \dots \cdot x_n^0$) многочлена f и положим

$$\Phi_f = \sum_{i=0}^{\infty} [f^i]_0 t^i \in \mathbb{C}[[t]].$$

Определение 2.1. Ряд Φ_f называется *рядом свободных членов* для многочлена f .

Определение 2.2. Пусть f — многочлен Лорана от n переменных x_1, \dots, x_n .

Интеграл

$$\begin{aligned} I_f(t) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|x_i|=\varepsilon_i} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n} \frac{1}{1-tf} = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{j=0}^{\infty} t^j \cdot \int_{|x_i|=\varepsilon_i} f^j \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n} \in \mathbb{C}[[t]] \end{aligned}$$

называется *главным периодом* многочлена f , где ε_i — произвольные вещественные положительные числа.

Замечание 2.3. Имеем $I_f(t) = \Phi_f$.

Следующая теорема оправдывает это определение.

Теорема 2.4 ([Prz08b, Proposition 2.3]). Пусть f — многочлен Лорана от n переменных. Пусть $PF_f = PF_f(t, \frac{\partial}{\partial t})$ — дифференциальный оператор

Пикара–Фукса пучка гиперповерхностей в торе, задаваемого многочленом f . Тогда $PF_f[I_f(t)] = 0$.

Замечание 2.5. Обозначим порядок оператора PF_f через m , а его степень по t через r . Пусть $F_\alpha = \{1 - \alpha f = 0\}$, а Z — полустабильная компактификация пучка $\{F_t\}$ (то есть отображение $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$; будем обозначать его для простоты через f). Обозначим размерность трансцендентной части когомологий $R^{n-1}f_! \mathbb{Z}_Z$ через m_f (см. алгоритм для его вычисления в [DH86]), и обозначим число особенностей (с учетом кратностей) семейства f через r_f . Тогда $m \leq m_f$ и $r \leq r_f$. Поэтому можно написать дифференциальный оператор ограниченного по t и D порядка с неопределенными коэффициентами. Так как ряд I_f обращает его в ноль, мы получаем систему, состоящую из бесконечного числа линейных уравнений. Чтобы проверить, что $L_X = PF_f$, нам надо решить эту систему (она имеет единственное, с точностью до умножения на коэффициент, решение, так что нам надо решить только конечное число линейных уравнений).

На практике, однако, достаточно просто сравнить первые несколько коэффициентов разложения рядов I_f и \tilde{I}_0^X . Действительно, первые несколько коэффициентов ряда \tilde{I}_0^X определяют оператор L_X . Поэтому если эти первые несколько коэффициентов совпадают с первыми несколькими коэффициентами ряда I_f , то дифференциальный оператор, обращающий в ноль ряд Φ_f , с точностью до коэффициентов высокого порядка совпадает с L_X , так что $PF_f = L_X$.

Дадим теперь центральное определение работы.

Определение 2.6. *Торической моделью Ландау–Гинзбурга пары, состоящей из гладкого многообразия Фано X размерности n и дивизора D на нем называется многочлен Лорана $f \in \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$, удовлетворяющий следующим условиям.*

Условие периодов: Выполнено равенство $I_f = \tilde{I}_0^{X,D}$.

Условие Калаби–Яу: Существует относительная компактификация семейства слоев морфизма

$$f: (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C},$$

тотальным пространством которой является (некомпактное) гладкое многообразие Калаби–Яу Y . Такая компактификация называется *компактификацией Калаби–Яу*.

Торическое условие: Существует вырождение $X \rightsquigarrow T_X$ к торическому многообразию T_X , такое что $F(T_X) = N(f)$.

Многочлен Лорана, удовлетворяющий условию периодов, называется *слабой моделью Ландау–Гинзбурга*.

Определение 2.7. Компактификация семейства $f: (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}$ до семейства $f: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$, где многообразие Z гладко и $-K_Z = f^{-1}(\infty)$, называется *компактификацией лог-Калаби–Яу* (ср. определение 3.17).

Приведем теперь обоснование естественности понятия торической модели Ландау–Гинзбурга.

Условие периодов есть ни что иное, как гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа, сформулированной Гивенталем, для случая, когда тотальное пространство является алгебраическим тором. Это условие связывает инварианты Громова–Виттена с периодами двойственной модели. Периоды — это интегралы послонных форм семейства по послонным циклам. Это значит, что они не изменяются при бирациональных преобразованиях семейства, бирегулярных в окрестности циклов, по которым берутся интегралы. Гивенталь построил модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в

гладких торических многообразиях как квазиаффинные многообразия, снабженные суперпотенциалом (см. параграф 5.1 и параграф 6.1). Однако во многих случаях эти модели бирациональны алгебраическому тору, и основной период сохраняется при соответствующем бирациональном изоморфизме, см. параграф 5.2, часть 6, а также [DN15] и [CoKaPr14].

Условие Калаби–Яу восходит к следующему принципу.

Принцип 2.8 (компактификационный принцип). *Существует послойная компактификация семейства слоев “хорошей” торической модели Ландау–Гинзбурга (определенной с точностью до флопов) удовлетворяющая (на стороне B) гипотезе гомологической зеркальной симметрии.*

В частности это значит, что должна существовать послойная компактификация до (открытого) гладкого многообразия Калаби–Яу — семейства компактных многообразий Калаби–Яу. Это условие достаточно сильное: скажем, если $f(x_1, \dots, x_n)$ — торическая модель Ландау–Гинзбурга для многообразия X , то для $k > 1$ многочлен Лорана $f(x_1^k, \dots, x_n)$ удовлетворяет условию периодов для X , но условие Калаби–Яу, а, значит, и компактификационный принцип для него не выполняется. Однако условия периодов и условия Калаби–Яу для выполнения компактификационного принципа недостаточно.

Пример 2.9. Многочлены

$$\frac{(x + y + 1)^3}{xyzw} + z + w$$

и

$$\left(x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1 x_2}\right) \left(y_1 + y_2 + \frac{1}{y_1 y_2}\right)$$

удовлетворяют условию периодов и условию Калаби–Яу для четырехмерной кубики. Однако они не послойно бирационально эквивалентны (у них разное количество компонент центрального слоя, ср. 4.4). Ожидается, что первый из них удовлетворяет компактификационному принципу.

Легко проверить, что второй многочлен Лорана из примера 2.9 не является торической моделью Ландау–Гинзбурга: степень торического многообразия, соответствующего этому многочлену, отличается от степени четырехмерной кубики.

Наконец, торическое условие восходит к конструкции Батырева зеркальной двойственности полных пересечений Калаби–Яу в торических многообразиях через двойственность торических многообразий, см. [Ва93].

Мы рассматриваем зеркальную симметрию как соответствие между многообразиями Фано и многочленами Лорана. А именно, усиленная версия гипотезы зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа гласит следующее.

Гипотеза 2.10. *Любая пара, состоящая из гладкого многообразия Фано и дивизора на нем, имеет торическую модель Ландау–Гинзбурга.*

Следствие 2.11. *Каждое гладкое многообразие Фано имеет торическое вырождение.*

Это позволяет надеяться, что имеет место следующая картина.

Оптимистическая картина 2.12. *Торические вырождения многообразий Фано взаимно однозначно соответствуют торическим моделям Ландау–Гинзбурга. Для них выполнен компактификационный принцип.*

Вопрос 2.13. *Верно ли, что выполнено обратное ко второй части компактификационного принципа? А именно, верно ли, что все модели Ландау–Гинзбурга (с точки зрения гомологической зеркальной симметрии) той же размерности, что и исходное многообразие Фано, являются компактификациями торических? В частности, верно ли, что все они рациональны?*

Вопрос 2.14. *Нужно ли наложить какие-либо условия на торические многообразия в оптимистической картине 2.12?*

Часть 3. Поверхности дель Пеццо

3.1. ОБЩАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Мы начнем этот параграф с напоминания хорошо известных фактов о поверхностях дель Пеццо. В качестве одной из многих ссылок по поверхностям дель Пеццо приведем, к примеру, [Do12].

Первоначальное определение поверхностей дель Пеццо было дано самим П. дель Пеццо.

Определение 3.1 ([dP87]). *Поверхностью дель Пеццо* называется невырожденная неприводимая линейно нормальная (то есть не являющейся проекцией поверхности степени d в \mathbb{P}^{d+1}) поверхность степени d в \mathbb{P}^d , не являющаяся конусом.

В современных терминах это значит, что поверхность дель Пеццо — это поверхность с очень обильным антиканоническим классом (в антиканоническом вложении) и каноническими (другими словами дювалевскими, простыми поверхностными, клейновыми, или рациональными двойными точками) особенностями. (Классы канонических и горенштейновых особенностей для поверхностей совпадают.) Поэтому мы используем следующее более общее определение.

Определение 3.2. *Поверхностью дель Пеццо* называется полная поверхность с очень обильным антиканоническим классом и каноническими особенностями. *Слабой поверхностью дель Пеццо* называется полная поверхность с численно эффективным и объемным антиканоническим классом и каноническими особенностями.

Замечание 3.3. Слабые поверхности дель Пеццо — это (частичные) минимальные разрешения особенностей поверхностей дель Пеццо. Исключительными дивизорами этих разрешений являются (-2) -кривые.

Степенью поверхности дель Пеццо S называется число $d = (-K_S)^2$. Известно, что $1 \leq d \leq 9$. Если $d > 2$, то антиканонический класс поверхности S очень обилен и задает вложение $S \hookrightarrow \mathbb{P}^d$, так что оба определения совпадают. В этом параграфе мы будем предполагать, что $d > 2$.

Очевидно, что проектируя поверхность степени d в \mathbb{P}^d из точки на ней, получим поверхность степени $d - 1$ в \mathbb{P}^{d-1} . Эта проекция — не что иное, как композиция раздутия центра проекции и стягивания всех прямых, через него проходящих. (По формуле присоединения, эти прямые являются (-2) -кривыми.) Если мы выберем общие (то есть не лежащие на прямых) центры проекций, мы получим классическое описание гладкой поверхности дель Пеццо степени d как квадратичной поверхности (при $d = 8$) или раздутия \mathbb{P}^2 в $9 - d$ точках. Они вырождаются к особым поверхностям, которые являются проекциями из необщих точек (включая бесконечно близкие). Более того, все поверхности дель Пеццо заданной степени лежат в одном и том же неприводимом пространстве деформаций, за исключением случая степени 8, в котором пространство деформации имеет две компоненты (одна для квадратики, а другая для раздутия \mathbb{F}_1 проективной плоскости в одной точке). Общие слои этих семейств являются гладкими, а все горенштейновы поверхности дель Пеццо являются вырождениями гладких в этих семействах. Это описание позволяет построить торические вырождения поверхностей дель Пеццо. Проектируя из торических точек, мы получаем (возможно, особые) торические поверхности дель Пеццо.

Замечание 3.4. Поверхности дель Пеццо степеней 1 и 2 также допускают торические вырождения. Действительно, их можно описать как гиперповерхности во взвешенных проективных пространствах, а именно, степени 4 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ и степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ соответственно, так что их можно вырождать к биномиальным гиперповерхностям, ср. пример 5.26. Однако особенности этих вырождений хуже, чем канонические.

Пусть T_S — горенштейново торическое вырождение поверхности дель Пеццо S степени d . Пусть $\Delta = F(T_S) \subset \mathcal{N}_{\mathbb{R}} = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{R}$ — веерный многоугольник многообразия T_S . Пусть f — многочлен Лорана, такой, что $N(f) = \Delta$.

Нашей целью является детальное описание способа построения компактификации Калаби–Яу для f . Более точно, мы построим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C}^*)^2 & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & Z \\ & \searrow f & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{A}^1 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

в которой многообразия Y и Z гладкие, слои отображения $Y \rightarrow \mathbb{A}^1$ и отображения $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ компактны, и $-K_Z = f^{-1}(\infty)$; для простоты мы будем обозначать все “вертикальные” отображения в диаграмме через f .

Наша стратегия будет следующей. Сначала рассмотрим естественную компактификацию пучка $\{f = \lambda\}$ до эллиптического пучка в торической поверхности дель Пеццо T^\vee . Далее мы разрешим особенности многообразия T^\vee и получим гладкую торическую слабую поверхность дель Пеццо \tilde{T}^\vee . Наконец, мы разрешим базисное множество, чтобы получить Z . Многообразие Y получается вырезанием собственного прообраза граничного дивизора многообразия \tilde{T}^\vee .

Многоугольник Δ имеет целочисленные вершины в $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$, и единственной строго внутренней целой точкой является центр координат. Двойственный многоугольник $\nabla = \Delta^\vee \subset \mathcal{M} = \mathcal{N}^\vee$ также имеет целочисленные вершины и единственную строго внутреннюю целую точку. Геометрически это означает, что особенности многообразий T и T^\vee канонические.

Замечание 3.5. Нормализованный объем многоугольника ∇ задается формулой

$$\text{vol } \nabla = |\text{целые точки в } \nabla| - 1 = (-K_S)^2 = d.$$

Легко видеть, что

$$|\text{целые точки в } \Delta| + |\text{целые точки в } \nabla| = 12.$$

В частности, $\text{vol } \Delta = 12 - d$.

Конструкция компактификации 3.6. Согласно факту 1.10, антиканоническая линейная система на многообразии T^\vee может быть описана как проективизация линейной системы многочленов Лорана, многогранники Ньютона которых содержатся в $\nabla^\vee = \Delta$. Таким образом, естественным путем компактификации семейства является использование вложения $(\mathbb{C}^*)^2 \hookrightarrow T^\vee$. Слоями семейства являются антиканонические дивизоры в этом (возможно, особом) торическом многообразии. Два антиканонических сечения пересекаются по $(-K_{T^\vee})^2 = \text{vol } \Delta = 12 - d$ точкам (с учетом кратностей), так что компактификация семейства в T^\vee имеет $12 - d$ базисных точек (возможно, с кратностями). Семейство $\{f = \lambda, \lambda \in \mathbb{C}\}$ порождено своим общим слоем и дивизором, соответствующим постоянному многочлену Лорана, то есть граничным дивизором для T^\vee . Заметим, что по факту 1.12 тор-инвариантные точки многообразия T^\vee не лежат в базисном множестве семейства.

Пусть $\tilde{T}^\vee \rightarrow T^\vee$ — минимальное разрешение особенностей многообразия T^\vee . Поднимем на него рассматриваемый пучок. Мы получим эллиптический пучок с $12 - d$ базовыми точками (с кратностями), которые являются гладкими точками одного из слоев семейства, например, граничного дивизора D торической поверхности \tilde{T}^\vee ; он является колесом из d гладких рациональных кривых. Раздув эти базисные точки, получим эллиптическую поверхность Z . Пусть E_1, \dots, E_{12-d} — исключительные дивизоры раздутия $\pi: Z \rightarrow \tilde{T}^\vee$; в частности, многообразие Z не торическое. Для простоты обозначим собственный прообраз дивизора D также через D . Тогда

$$-K_Z = \pi^*(-K_{\tilde{T}^\vee}) - \sum E_i = D + \sum E_i - \sum E_i = D.$$

Таким образом, антиканонический класс $-K_Z$ содержит D и состоит из слоев многообразия Z . В частности, это значит, что открытое многообразие $Y = Z \setminus D$ является компактификацией Калаби–Яу пучка, заданного функцией f . Это многообразие имеет $e > 0$ сечений, где e — число базисных точек пучка в \tilde{T}^\vee , подсчитанных без кратностей.

Подводя итог, мы получили семейство эллиптических кривых $f: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ с гладким тотальным пространством Z и колесом D из d гладких рациональных кривых над ∞ .

Замечание 3.7. Пусть многочлен f общий среди многочленов Лорана с заданным многоугольником Ньютона. Тогда особые слои отображения $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ являются либо кривыми с единственным nodом, либо колесо из d рациональных кривых над ∞ . По формуле Нетера

$$12\chi(\mathcal{O}_Z) = (-K_Z)^2 + e(Z) = e(Z),$$

где через $e(Z)$ обозначена топологическая эйлерова характеристика. Таким образом, особыми слоями отображения $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ являются d кривых с одним nodом и колесо из d кривых над ∞ . Такое описание приведено в [АКО06].

Замечание 3.8. Торические модели Ландау–Гинзбурга всех поверхностей дель Пеццо степени не меньше трех можно компактифицировать одновременно. А именно, все рефлексивные многоугольники содержатся в наибольшем многоугольнике B , имеющим вершины $(2, -1)$, $(-1, 2)$, $(-1, -1)$. Таким образом, слои всех торических моделей Ландау–Гинзбурга могут быть компактифицированы одновременно до (возможно особых) антиканонических кривых на $T_{B^\vee} = \mathbb{P}^2$. Раздув базисные точки, мы получим пучок без базисного множества. Однако в этом случае общий член семейства может проходить через торические точки, потому что может оказаться, что $N(f) \not\subseteq B$. Это означает, что некоторые исключительные дивизоры минимального разрешения становятся дополнительными кривыми в колесе над бесконечностью.

Другими словами, рассмотрим треугольник прямых и эллиптическую кривую на \mathbb{P}^2 . Общим элементом пучка, определяемого многочленом f , является эллиптическая кривая на \mathbb{P}^2 . Тотальным пространством компактификации лог-Калаби–Яу является раздутие девяти точек пересечения (подсчитанных с учетом кратностей) эллиптической кривой и треугольника прямых. Исключительные дивизоры, лежащие над вершинами треугольника, являются компонентами колеса над бесконечностью для компактификации Калаби–Яу; остальные являются либо сечениями пучка, либо компонентами слоев над конечными точками.

Опишем теперь торические модели Ландау–Гинзбурга для поверхностей дель Пеццо и торических слабых поверхностей дель Пеццо. А именно, для поверхности дель Пеццо S , его горенштейнова торического вырождения T с веерным многоугольником Δ , его крепантного разрешения \tilde{T} с тем же самым веерным многоугольником и дивизором $D \in \text{Pic}(S)_{\mathbb{C}} \cong \text{Pic}(\tilde{T})_{\mathbb{C}}$, мы построим по индукции два многочлена Лорана $f_{S,D}$ и $f_{\tilde{T},D}$, которые являются торическими моделями Ландау–Гинзбурга для S и \tilde{T} соответственно. Для этого, в частности, воспользуемся конструкцией Гивенталья для моделей Ландау–Гинзбурга гладких торических многообразий, см. параграф 5.1.

Пусть $S \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ — квадратичная поверхность, и пусть D_S — дивизор типа (a, b) на ней. Пусть $T_1 = S$, и пусть T_2 — квадратичный конус; поверхности T_1 и T_2 являются единственными торическими вырождениями поверхности S . Крепантным разрешением поверхности T_2 является поверхность Хирцебруха \mathbb{F}_2 , так что положим $D_{\mathbb{F}_2} = \alpha s + \beta f$, где s — класс сечения поверхности \mathbb{F}_2 , так что $s^2 = -2$, и обозначим слой отображения $\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ через f . Положим

$$f_{S,D_S} = f_{\tilde{T}_1,D_S} = x + \frac{e^{-a}}{x} + y + \frac{e^{-b}}{y}$$

для первого торического вырождения и

$$f_{S,D_S} = y + e^{-a} \frac{1}{xy} + (e^{-a} + e^{-b}) \frac{1}{y} + e^{-b} \frac{x}{y}, \quad f_{\tilde{T}_2,D_{\mathbb{F}_2}} = y + \frac{e^{-\beta}}{xy} + \frac{e^{-\alpha}}{y} + \frac{x}{y}$$

для второго.

Пусть теперь поверхность S является раздутием плоскости \mathbb{P}^2 . Положим сперва $S = T = \tilde{T} = \mathbb{P}^2$, пусть l — класс прямой на S и пусть $D = a_0 l$. Тогда с точностью до торической замены переменных

$$f_{(\mathbb{P}^2, D)} = x + y + \frac{e^{-a_0}}{xy}.$$

Пусть теперь S' — раздутие \mathbb{P}^2 в k точках с исключительными дивизорами e_1, \dots, e_k , пусть S — раздутие поверхности S' в точке, и пусть e_{k+1} — исключительный дивизор этого раздутия. Мы отождествим дивизоры на S' и их собственные прообразы на S , так что $\text{Pic}(S') = \text{Pic}(\tilde{T}') = \mathbb{Z}l + \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_k$ и $\text{Pic}(S) = \mathbb{Z}l + \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_k + \mathbb{Z}e_{k+1}$. Пусть

$$D' = a_0 l + a_1 e_1 + \dots + a_k e_k \in \text{Pic}(S')_{\mathbb{C}}$$

и $D = D' + a_{k+1} e_{k+1} \in \text{Pic}(S)_{\mathbb{C}}$. Сперва опишем многочлен $f_{\tilde{T}, D}$. Комбинаторно многоугольник $\Delta = F(\tilde{T})$ получается из многоугольника $\Delta' = F(\tilde{T}')$ добавлением одной целой точки K , которая соответствует исключительному дивизору e_{k+1} и взятию выпуклой оболочки. Пусть L, R — граничные точки многоугольника Δ , соседние с K , слева и справа по часовой стрелке. Пусть c_L и c_R — коэффициенты многочлена $f_{\tilde{T}', D'}$ при мономах, соответствующих L и R . Пусть $M \in \mathbb{T}[x, y]$ — моном, соответствующий K . Тогда, согласно описанию Гивенталья моделей Ландау–Гинзбурга торических многообразий (см. [Gi97b]),

$$f_{\tilde{T}, D} = f_{\tilde{T}', D'} + c_L c_R e^{-a_{k+1}} M.$$

Многочлен $f_{S, D}$ отличается от $f_{\tilde{T}, D}$ на коэффициенты при граничных точках, не являющихся вершинами. Для любой граничной точки $K \subset \Delta$ определим *отметку* m_K как коэффициент многочлена $f_{\tilde{T}, D}$ при K . Рассмотрим сторону многоугольника Δ и пусть K_0, \dots, K_r — целые точки этой стороны, пронумерованные по часовой стрелке. Тогда коэффициент многочлена $f_{S, D}$ в

точке K_i является коэффициентом при s^i в многочлене

$$m_{K_0} \left(1 + \frac{m_{K_1}}{m_{K_0}} s \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{m_{K_r}}{m_{K_{r-1}}} s \right).$$

Замечание 3.9. Имеем $\text{Pic}(S) \cong \text{Pic}(\tilde{T})$. Таким образом, если S — не квадрика то обе поверхности S и \tilde{T} получены последовательностью раздутий в точках (единственная разница состоит в том, что точки для \tilde{T} могут лежать на исключительных дивизорах предыдущих раздутий). Таким образом, в обоих случаях группы Пикара порождены классом прямой на \mathbb{P}^2 и исключительными дивизорами e_1, \dots, e_k . Однако образ кривой e_i при отображении групп Пикара, заданного вырождением поверхности S к \tilde{T} , может не совпадать с самой кривой e_i , но быть некоторой линейной комбинацией исключительных дивизоров. Другими словами, эти базисы не согласованы с отображением вырождения.

Замечание 3.10. Пространства, параметризующие торические модели Ландау–Гинзбурга для S и для \tilde{T} одинаковы — они являются пространством многочленов Лорана с многоугольником Ньютона Δ по модулю торических замен координат. Таким образом, любой многочлен Лорана соответствует различным элементам пространств $\text{Pic}(S)_{\mathbb{C}} \cong \text{Pic}(\tilde{T})_{\mathbb{C}}$. Это дает отображение $\text{Pic}(S)_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Pic}(\tilde{T})_{\mathbb{C}}$. Однако это отображение трансцендентно из-за экспоненциальной природы параметризации.

Предложение 3.11. *Многочлен Лорана $f_{S,D}$ является торической моделью Ландау–Гинзбурга для пары (S, D) .*

Доказательство. Известно, что поверхность дель Пеццо S может быть описана либо как гладкое торическое многообразие, либо как полное пересечение в гладком торическом многообразии. Это позволяет вычислить ряд I_0^S и, таким образом, ряд $\tilde{I}_0^{S,D}$, следуя [Gi97b], см. теорему 5.11. Используя это, можно напрямую проверить условие периодов для $f_{S,D}$. Условие Калаби–Яу

следует из конструкции компактификации 3.6. Наконец, торическое условие выполнено по конструкции. (См. пример 3.14.) \square

Предложение 3.12. *Рассмотрим два различных горнштейнова торических вырождения T_1 и T_2 поверхности дель Пецо S . Пусть $\Delta_1 = F(T_1)$ и $\Delta_2 = F(T_2)$. Рассмотрим семейства компактификаций Калаби–Яу многочленов Лорана с многоугольниками Ньютона Δ_1 и Δ_2 . Тогда существует бирациональный изоморфизм этих семейств. Другими словами, существует бирациональный изоморфизм между аффинными пространствами многочленов Лорана с носителями в Δ_1 и Δ_2 по модулю торической замены переменных, которая сохраняет компактификации Калаби–Яу.*

Доказательство. Можно проверить, что многоугольники Δ_1 и Δ_2 различаются на (последовательность) мутаций (см., к примеру, [ACGK12]). Эти мутации по конструкции согласованы с послойными бирациональными изоморфизмами торических моделей Ландау–Гинзбурга по модулю замены базиса в $H^2(S, \mathbb{Z})$. Утверждение следует из того факта, что бирациональные эллиптические кривые изоморфны. \square

Замечание 3.13. Пусть $D = 0$. Тогда многочлен $f_{S,0}$ имеет коэффициенты 1 в вершинах его многоугольника Ньютона и $\binom{n}{k}$ в k -й целой точке стороны целочисленной длины n . Другими словами, многочлен $f_{S,0}$ биномиален, ср. параграф 4.1.

Пример 3.14. Пусть $S = S_7$. Эта поверхность имеет два торических вырождения: она сама торическая, а также она может быть вырождена к особой поверхности, полученной раздутием точки на \mathbb{P}^2 , раздутием точки на исключительной кривой и стягиванием первой исключительной кривой в точку типа A_2 .

Пусть Δ_1 — многоугольник с вершинами $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(-1, -1)$, $(0, -1)$, и пусть $D = a_0l + a_1e_1 + a_2e_2$. Тогда

$$f_{\tilde{T}_{\Delta_1, D}} = f_{S, D} = x + y + e^{-a_0} \frac{1}{xy} + e^{-(a_0+a_1)} \frac{1}{y} + e^{-a_2} xy.$$

Пусть Δ_2 — многоугольник с вершинами $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$, и пусть $D = a_0l + a_1e_1 + a_2e_2$. Тогда

$$f_{\tilde{T}_{\Delta_2, D}} = x + y + e^{-a_0} \frac{1}{xy} + e^{-(a_0+a_1)} \frac{1}{y} + e^{-(a_0+a_1+a_2)} \frac{x}{y},$$

$$f'_{S, D} = x + y + e^{-a_0} \frac{1}{xy} + \left(e^{-(a_0+a_1)} + e^{-(a_0+a_2)} \right) \frac{1}{y} + e^{-(a_0+a_1+a_2)} \frac{x}{y}.$$

(Здесь $f_{S, D}$ и $f'_{S, D}$ — торические модели Ландау–Гинзбурга для пары (S, D) , записанные в разных базисах в $(\mathbb{C}^*)^2$.) Легко можно проверить, что мутация

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow \frac{y}{1 + e^{-a_2}x}$$

переводит $f_{S, D}$ в $f'_{S, D}$.

Поверхность S торическая, так что, согласно Гивенталю,

$$\tilde{I}_0^{S, D} = \sum_{k, l, m} \frac{(2k + 3l + 2m)! e^{-a_0(k+l+m) - a_1k - a_2m} t^{2k+3l+2m}}{(k+l)!(l+m)!k!l!m!}$$

(см. [CCG⁺]). Можно проверить, что $\tilde{I}_0^{S, D} = I_{f_{S, D}} = I_{f'_{S, D}}$.

3.2. ГИПОТЕЗЫ КАЦАРКОВА–КОНЦЕВИЧА–ПАНТЕВА

В этом параграфе мы изучим числа Ходжа для моделей Ландау–Гинзбурга поверхностей дель Пеццо. Гипотезой зеркальной симметрии, которая нас будет интересовать в этом параграфе, является гипотеза гомологической зеркальной симметрии. Для поверхностей дель Пеццо она (а точнее ее половина) была доказана в статье [АКО06]. В этой статье модель Ландау–Гинзбурга для поверхности дель Пеццо степени d строится как пучок эллиптических кривых, слоем над бесконечностью которого является колесо из $12 - d$ кривых, а остальные особые слои — это d слоев, имеющих одну обыкновенную двойную

точку (то есть нод). Такой пучок является моделью Ландау–Гинзбурга для поверхности дел Пецо и общей формы на ней. Однако категория Фукаи–Зайделя инвариантна при деформации пучка, поэтому для изучения гипотезы зеркальной симметрии достаточно рассмотреть случай общей формы. Кроме того, результаты этого параграфа не зависят от строения особых слоев вдали от бесконечности. Наконец, заметим, что модели Ландау–Гинзбурга, изучающиеся в настоящем параграфе, соответствуют всем поверхностям дель Пецо, а не только имеющим степень не меньше трех, как в параграфе 3.1.

Напомним некоторые численные гипотезы из работы [ККР17], которые, как предполагается, следуют из гипотезы гомологической зеркальной симметрии для многообразий Фано и двойственных моделей Ландау–Гинзбурга.

Определение 3.15. *Моделью Ландау–Гинзбурга* называется пара (Y, w) , в которой

- (i) Y является гладким комплексным квазипроективным многообразием с тривиальным каноническим классом K_Y ;
- (ii) $w: Y \rightarrow \mathbb{A}^1$ является морфизмом с компактным критическим множеством $\text{crit}(w) \subset Y$.

Замечание 3.16. Заметим, что мы не ставим никаких условий на особенности слоев.

Следуя работе [ККР17], предположим, что существует *ручная компактификация* модели Ландау–Гинзбурга, определенная следующим образом (ср. определение 2.7).

Определение 3.17. *Вручную компактифицированную моделью Ландау–Гинзбурга* называется набор данных $((Z, f), D_Z)$, в котором

- (i) Z является гладким проективным многообразием, а $f: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ является гладким морфизмом;

(ii) $D_Z = (\cup_i D_i^h) \cup (\cup_j D_j^v)$ является приведенным дивизором с простыми нормальными пересечениями, таким что

(i) $D^v = \cup_j D_j^v$ является схемно-теоретическим дивизором — полюсом морфизма f , то есть $f^{-1}(\infty) = D^v$. В частности, $ord_{D_j^v}(f) = -1$ для всех j ;

(ii) каждая компонента D_i^h дивизора $D^h = \cup_i D_i^h$ является гладкой и горизонтальной для морфизма f , то есть $f|_{D_i^h}$ является гладким морфизмом;

(iii) критическое множество $crit(f) \subset Z$ не пересекает дивизор D^h .

(iii) D_Z является антиканоническим дивизором на Z .

Говорят, что набор $((Z, f), D_Z)$ является *компактификацией модели Ландау–Гинзбурга* (Y, w) , если вдобавок выполнено следующее:

(iv) $Y = Z \setminus D_Z$, $f|_Y = w$. Через $j : Y \hookrightarrow Z$ мы будем обозначать открытое вложение.

Замечание 3.18. В работе [ККР17] в приведенном выше определении также требуется дополнительный выбор совместимых голоморфных форм на Z и Y . Эти формы не играют роли в наших рассуждениях, так что мы их опустим.

Предположим, что нам дана модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) с ручной компактификацией $((Z, f), D_Z)$. Обозначим через $n = \dim Y = \dim Z$ (комплексную) размерность многообразий Y и Z . Выберем точку $b \in \mathbb{A}^1$ рядом с ∞ , такую что слой $Y_b = w^{-1}(b) \subset Y$ является гладким. В работе [ККР17] авторы геометрически определяют три набора чисел, которые они называют “числами Ходжа” $i^{p,q}(Y, w)$, $h^{p,q}(Y, w)$, $f^{p,q}(Y, w)$. Приведем здесь эти определения.

3.2.1. **Числа** $f^{p,q}(Y, w)$. Напомним определение логарифмического комплекса де Рама $\Omega_Z^*(\log D_Z)$. А именно, $\Omega_Z^s(\log D_Z) = \wedge^s \Omega_Z^1(\log D_Z)$, где $\Omega_Z^1(\log D_Z)$ — локально свободный \mathcal{O}_Z -модуль, локально порожденный

$$\frac{dz_1}{z_1}, \dots, \frac{dz_k}{z_k}, dz_{k+1}, \dots, dz_n,$$

где $z_1 \cdot \dots \cdot z_k = 0$ — локальное уравнение дивизора D_Z . В частности, $\Omega_Z^0(\log D_Z) = \mathcal{O}_Z$.

Числа $f^{p,q}(Y, w)$ определяются с помощью подкомплекса

$$\Omega_Z^*(\log D_Z, f) \subset \Omega_Z^*(\log D_Z)$$

f -адаптированных форм, определенных следующим образом.

Определение 3.19. Для каждого показателя $a \geq 0$ определим пучок f -адаптированных логарифмических форм $\Omega_Z^a(\log D_Z, f)$ как подпучок пучка $\Omega_Z^a(\log D_Z)$, состоящий из форм, остающихся логарифмическими после внешнего умножения на df . Иными словами,

$$\Omega_Z^a(\log D_Z, f) = \{\alpha \in \Omega_Z^a(\log D_Z) \mid df \wedge \alpha \in \Omega_Z^{a+1}(\log D_Z)\},$$

где f рассматривается как мероморфная функция на Z , и df является мероморфной 1-формой.

Определение 3.20. Числа Ходжа модели Ландау–Гинзбурга $f^{p,q}(Y, w)$ определяются следующим образом:

$$f^{p,q}(Y, w) = \dim H^p(Z, \Omega_Z^q(\log D_Z, f)).$$

3.2.2. **Числа** $h^{p,q}(Y, w)$. Пусть $N: V \rightarrow V$ — нильпотентный оператор на конечномерном линейном пространстве V , такой что $N^{m+1} = 0$. Напомним, что эти данные определяют каноническую (монодромную) весовую фильтрацию, центрированную в m , $W = W_*(N, m)$ пространства V

$$0 \subset W_0(N, w) \subset W_1(N, w) \subset \dots \subset W_{2m-1}(N, m) \subset W_{2m}(N, m) = V$$

с условиями

$$(i) N(W_i) \subset W_{i-2},$$

(ii) отображение $N^l: gr_{m+l}^W V \rightarrow gr_{m-l}^W V$ являются изоморфизмом для всех $l \geq 0$.

Пусть $S^1 \simeq C \subset \mathbb{P}^1$ — петля, проходящая через точку b , обходящая один раз вокруг ∞ против часовой стрелки, такая, что внутри C не содержится особых точек морфизма w . Она дает преобразование монодромии

$$T: H^*(Y_b) \rightarrow H^*(Y_b),$$

а также соответствующее преобразование монодромии в относительных когомологиях

$$(3.21) \quad T: H^*(Y, Y_b) \rightarrow H^*(Y, Y_b)$$

таким образом, что последовательность

$$\dots \rightarrow H^m(Y, Y_b) \rightarrow H^m(Y) \rightarrow H^m(Y_b) \rightarrow H^{m+1}(Y, Y_b) \rightarrow \dots$$

является T -эквивариантной, где T действует тривиально на $H^*(Y)$. (См. конструкцию и обсуждение преобразования монодромии $T: H^*(Y, Y_b) \rightarrow H^*(Y, Y_b)$ в пункте 3.3.1.) Так как мы предположили, что слой над бесконечностью $f^{-1}(\infty) \subset Z$ является приведенным дивизором с нормальными пересечениями, по теореме Гриффитса–Ландмана–Гротендика (см. [Ka70]) оператор $T: H^m(Y_b) \rightarrow H^m(Y_b)$ унипотентен, и $(T - \text{id})^{m+1} = 0$. Отсюда следует, что преобразование (3.21) также унипотентно. Обозначим через N логарифм преобразования (3.21), который, таким образом, является нильпотентным оператором на $H^*(Y, Y_b)$. Имеем $N^{m+1} = 0$.

Определение 3.22. Модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) имеет *тип Фано*, если оператор N на относительных когомологиях $H^{n+a}(Y, Y_b)$ обладает следующими свойствами:

$$(i) N^{n-|a|} \neq 0,$$

$$(ii) N^{n-|a|+1} = 0.$$

Приведенное выше определение восходит к ожиданию того, что модель Ландау–Гинзбурга типа Фано обычно возникает как зеркальная пара к проективному многообразию Фано X (см. пункт 3.2.4).

Определение 3.23. Предположим, что модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) имеет тип Фано. Рассмотрим относительные когомологии $H^*(Y, Y_b)$ с нильпотентным оператором N и индуцированной канонической фильтрацией W . Числа Ходжа модели Ландау–Гинзбурга $h^{p,q}(Y, w)$ определяются следующим образом:

$$h^{p,n-q}(Y, w) = \dim gr_{2(n-p)}^{W(N, n-a)} H^{n+p-q}(Y, Y_b) \quad \text{если } a = p - q \geq 0,$$

$$h^{p,n-q}(Y, w) = \dim gr_{2(n-q)}^{W(N, n+a)} H^{n+p-q}(Y, Y_b) \quad \text{если } a = p - q < 0.$$

Замечание 3.24. Определение 3.23 отличается от [ККР17, Definition 3.2]

$$(3.25) \quad h^{p,q}(Y, w) = \dim gr_p^{W, p+q} H^{p+q}(Y, Y_b)$$

индексами градуировки. Похоже, что уравнение (3.25) не такое, какое авторы имели в виду. К примеру, согласно (3.25), индекс p может варьироваться от 0 до $2n$, а индекс q может быть отрицательным (детали см. в пункте 3.2.4).

3.2.3. Числа $i^{p,q}(Y, w)$. Напомним, что для каждого $\lambda \in \mathbb{A}^1$ имеется соответствующий пучок $\phi_{w-\lambda} \mathbb{C}_Y$ исчезающих циклов к слою Y_λ . Пучок $\phi_{w-\lambda} \mathbb{C}_Y$ имеет носителем слой Y_λ и равен нулю, если λ не является критическим значением морфизма w . Из классических работ Шмида, Стинбринка и Саито известно, что конструктивный комплекс $\phi_{w-\lambda} \mathbb{C}_Y$ имеет структуру смешанного модуля Ходжа, так что его когомологии имеют смешанную структуру Ходжа. Для смешанного модуля Ходжа S обозначим через $i^{p,q} S$ числа Ходжа типа (p, q) для $(p+q)$ -го весового пространства $gr_{p+q}^W S$.

Определение 3.26. (i) Предположим, что горизонтальный дивизор $D^h \subset Z$ пуст, то есть предположим, что отображение $w: Y \rightarrow \mathbb{A}^1$ собственное. Тогда числа Ходжа модели Ландау–Гинзбурга $i^{p,q}(Y, w)$ определяются следующим образом:

$$i^{p,q}(Y, w) = \sum_{\lambda \in \mathbb{A}^1} \sum_k i^{p,q+k} \mathbb{H}^{p+q-1}(Y_\lambda, \phi_{w-\lambda} \mathbb{C}_Y).$$

(ii) В общем случае обозначим через $j: Y \hookrightarrow Z$ открытое вложение и аналогичным образом определим

$$i^{p,q}(Y, w) = \sum_{\lambda \in \mathbb{A}^1} \sum_k i^{p,q+k} \mathbb{H}^{p+q-1}(Y_\lambda, \phi_{w-\lambda} \mathbf{R}j_* \mathbb{C}_Y).$$

3.2.4. Гипотезы. В статье [ККР17] показано, что для каждого числа m определенные выше числа удовлетворяют равенствам

(3.27)

$$\dim H^m(Y, Y_b; \mathbb{C}) = \sum_{p+q=m} i^{p,q}(Y, w) = \sum_{p+q=m} h^{p,q}(Y, w) = \sum_{p+q=m} f^{p,q}(Y, w).$$

Авторы этой статьи формулируют несколько гипотез, которые вместе усиливают равенства (3.27). Следующая гипотеза является модификацией [ККР17, Conjecture 3.6], см. замечание 3.24.

Гипотеза 3.28. Пусть (Y, w) — модель Ландау–Гинзбурга типа Фано. Тогда для каждой p, q выполнены равенства

$$h^{p,q}(Y, w) = f^{p,q}(Y, w) = i^{p,q}(Y, w).$$

Модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) типа Фано (вместе с ручной компактификацией) обычно возникает как зеркало для проективного многообразия Фано X , $\dim X = \dim Y$.

Следующая гипотеза является [ККР17, Conjecture 3.7], см. замечание 3.24.

Гипотеза 3.29. В описанной выше зеркальной ситуации для каждой p, q выполнено равенство

$$f^{p,q}(Y, w) = h^{p,n-q}(X),$$

в котором числа $h^{p,q}(X)$ являются обычными числами Ходжа для многообразия X .

Детальное описание и мотивация гипотез 3.28 и 3.29 содержится в [ККР17]. Исходно мотивация исходит из гипотез гомологической зеркальной симметрии, идентификации гомологий Хохшильда, и идентификации оператора монодромии с функтором Серра. А именно, предположим, что определенная выше модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) (вместе со своей ручной компактификацией) имеет тип Фано и является зеркально двойственной к проективному многообразию Фано X , $\dim X = \dim Y$. Тогда, исходя из гипотезы гомологической зеркальной симметрии, ожидается эквивалентность категорий

$$(3.30) \quad D^b(\text{coh } X) \simeq FS(Y, w, \omega_Y),$$

где $D^b(\text{coh } X)$ обозначает ограниченную производную категорию когерентных пучков на X , а $FS(Y, w)$ обозначает категорию Фукаи–Зайделя для модели Ландау–Гинзбурга (Y, w) , снабженной подходящей симплектической формой ω_Y . Из этой эквивалентности для каждого a следует изоморфизм пространств гомологий Хохшильда

$$HH_a(D^b(\text{coh } X)) \simeq HH_a(FS(Y, w, \omega_Y)).$$

Известно, что

$$(3.31) \quad HH_a(D^b(\text{coh } X)) \simeq \bigoplus_{p-q=a} H^p(X, \Omega_X^q),$$

и ожидается, что

$$(3.32) \quad HH_a(FS(Y, w, \omega_Y)) \simeq H^{n+a}(Y, Y_b).$$

Из эквивалентности (3.30) и изоморфизмов (3.31), (3.32) следует изоморфизм

$$H^{n+a}(Y, Y_b) = \bigoplus_{p-q=a} H^p(X, \Omega_X^q).$$

Более того, эквивалентность (3.30) отождествляет функторы Серра S_X и S_Y двух категорий. Функтор S_X действует на когомологиях $H^*(X)$, и логарифм этого оператора равен (с точностью до знака) умножению на $c_1(K_X)$. Так как X является многообразием Фано, оператор $c_1(K_X) \cup (\cdot)$ является лефшецовым оператором на пространстве

$$\bigoplus_{p-q=a} H^p(X, \Omega_X^q)$$

для всех a . С другой стороны, функтор Серра S_Y индуцирует оператор на пространстве $H^{n+a}(Y, Y_b)$, который является обратным к преобразованию монодромии T . Это значит, что монодромная весовая фильтрация для нильпотентного оператора $c_1(K_X) \cup (\cdot)$ на пространстве $\bigoplus_{p-q=a} H^p(X, \Omega_X^q)$ должна совпадать с аналогичной фильтрацией для логарифма N оператора T на $H^{n+a}(Y, Y_b)$. Заметим, что оператор $c_1(K_X) \cup (\cdot)$ на пространстве $\bigoplus_{p-q=a} H^p(X, \Omega_X^q)$ удовлетворяет неравенству $(c_1(K_X) \cup (\cdot))^{n-|a|} \neq 0$ по сильной теореме Лефшеца, и $(c_1(K_X) \cup (\cdot))^{n-|a|+1} = 0$. Это объясняет определение 3.22. Более того, индуцированная фильтрация W на $\bigoplus_{p-q=a} H^p(X, \Omega_X^q)$ имеет следующие свойства:

$$h^{p,q}(X) = gr_{2(n-p)}^{W, n-a} \left[\bigoplus_{p-q=a} H^p(X, \Omega_X^q) \right] \quad \text{если } a \geq 0$$

и

$$h^{p,q}(X) = gr_{2(n-q)}^{W, n+a} \left[\bigoplus_{p-q=a} H^p(X, \Omega_X^q) \right] \quad \text{если } a < 0.$$

Таким образом, ожидается равенство чисел Ходжа

$$h^{p, n-q}(Y, w) = h^{p,q}(X),$$

которое является комбинацией приведенных выше гипотез.

3.3. ГИПОТЕЗЫ КАЦАРКОВА–КОНЦЕВИЧА–ПАНТЕВА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрим вручную компактифицированную модель Ландау–Гинзбурга (Z, f) размерности 2. А именно, рассмотрим рациональную эллиптическую поверхность $f: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ с приведенным слоем над бесконечностью $f^{-1}(\infty)$, который является колесом из d рациональных кривых, $1 \leq d \leq 9$ (и нодальной рациональной кривой для $d = 1$). В этом случае горизонтальный дивизор D^h пуст, так что $D = D^v$. В работе [АКО06] показано, что соответствующая модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) является зеркально двойственной (с точки зрения гомологической зеркальной симметрии) к поверхности дель Пеццо S_d степени d . Авторы этой работы также доказали гипотезу гомологической зеркальной симметрии для случая $d = 0$: в этом случае слой $f^{-1}(\infty)$ является гладкой эллиптической кривой и модель (Y, w) является зеркально двойственной к раздутию S_0 плоскости \mathbb{P}^2 в 9 точках пересечения двух кубических кривых. Заметим, что такое многообразие S_0 не является Фано, поэтому можно ожидать, что соответствующая модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) не имеет тип Фано. Мы подтверждаем это ожидание. Следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

Теорема 3.33. *Пусть $f: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ — эллиптическая поверхность с приведенным слоем над бесконечностью $D = f^{-1}(\infty)$, который является колесом из d рациональных кривых, $1 \leq d \leq 9$, или гладкой эллиптической кривой для $d = 0$. Предположим, что f имеет сечение. Как и раньше, положим $(Y, w) = (Z \setminus D, f|_{Z \setminus D})$.*

(i) *Если $1 \leq d \leq 9$, то модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) имеет тип Фано, и выполнены равенства чисел Ходжа*

$$f^{p,q}(Y, w) = h^{p,q}(Y, w).$$

(ii) Пусть $1 \leq d \leq 9$, и пусть S_d — поверхность дель Пецо, являющаяся зеркально двойственной, в смысле [АКО06], к модели Ландау–Гинзбурга (Y, w) . Тогда выполнены равенства чисел Ходжа

$$f^{p,q}(Y, w) = h^{p,2-q}(S_d).$$

(iii) Если $d = 0$, то (Y, w) не имеет тип Фано.

Доказательство теоремы 3.33 содержится в предложении 3.48, предложении 3.66 и замечании 3.68.

Таким образом, гипотеза 3.28 о числах Ходжа $f^{p,q}(Y, w)$, $h^{p,q}(Y, w)$ и гипотеза 3.29 выполнена в случае, когда (Y, w) имеет тип Фано ($1 \leq d \leq 9$). Мы также покажем, что в контексте теоремы 3.33 числа $i^{p,q}(Y, w)$ не равны числам $f^{p,q}(Y, w)$ (или числам $h^{p,q}(Y, w)$, или числам $h^{p,2-q}(X)$), таким образом предьявляя контрпример к гипотезе 3.28, см. замечание 3.69. Мы не знаем, как определить “правильные” числа $i^{p,q}(Y, w)$, для которых будет выполнена гипотеза 3.28.

3.3.1. Действие монодромии на относительных когомологиях. Пусть V — гладкое комплексное многообразие размерности n с собственным морфизмом $w: V \rightarrow \mathbb{C}$. Пусть $b \in \mathbb{C}$ — регулярное значение морфизма w . В этом пункте мы построим действие монодромии на относительных гомологиях $H_*(V, V_b)$, которые, по двойственности, индуцируют необходимое действие на $H^*(V, V_b)$.

Пусть $C \simeq S^1 \subset \mathbb{P}^1$ — петля, проходящая через точку b и обходящая один раз вокруг ∞ против часовой стрелки таким образом, что внутри C нет особых значений морфизма w . Обозначим через M прообраз $w^{-1}(C) \subset Y$. Тогда M является компактным ориентированным гладким многообразием, содержащим слой V_b . (Вещественные) размерности многообразий M и V_b равны $2n - 1$ и $2n - 2$ соответственно. По лемме Эресманна, отображение

$w: M \rightarrow C$ является локально тривиальным расслоением гладких многообразий со слоями, диффеоморфными V_b . Следовательно, существует диффеоморфизм $T: V_b \rightarrow V_b$, такой что M диффеоморфно фактору

$$M = V_b \times [0, 1] / \{(a, 0) = (T(a), 1) \text{ для всех } a \in V_b\}.$$

Для пары (M, V_b) имеется соответственная длинная точная последовательность гомологий

$$(3.34) \quad \dots \rightarrow H_i(V_b) \xrightarrow{\alpha_i} H_i(M) \xrightarrow{\beta_i} H_i(M, V_b) \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(V_b) \rightarrow \dots$$

Диффеоморфизм $T: V_b \rightarrow V_b$ индуцирует автоморфизмы $T: H_i(V_b) \rightarrow H_i(V_b)$.

Лемма 3.35. *Для каждого $i \geq 0$ существует гомоморфизм $L_i: H_i(V_b) \rightarrow H_{i+1}(M, V_b)$, такой что для всех $x \in H_i(V_b)$ выполнено*

$$\partial_{i+1} L_i(x) = T(x) - x.$$

Доказательство. Пусть z — i -мерный цикл на V_b . Рассмотрим $(i+1)$ -мерный относительный цикл $z \times [0, 1]$ на $(V_b \times [0, 1], V_b \times \{0\} \cup V_b \times \{1\})$ с границей $z \times \{1\} - z \times \{0\}$. Его образ $L_i(z)$ на M является относительным $(i+1)$ -циклом с границей $T(z) - z$ на V_b . Эта конструкция дает требуемый гомоморфизм $L_i: H_i(V_b) \rightarrow H_{i+1}(M, V_b)$. Для $x \in H_i(V_b)$ равенство

$$\partial_{i+1} L_i(x) = T(x) - x$$

ясно из конструкции. □

Предложение 3.36. *Для каждого $i \geq 0$ отображение $L_i: H_i(V_b) \rightarrow H_{i+1}(M, V_b)$ инъективно.*

Доказательство. Пусть z — i -мерный цикл на V_b , который представляет ненулевой класс гомологий $[z] \in H_i(V_b)$. По двойственности Пуанкаре для

гладкого компактного многообразия V_b размерности $2n - 2$, существует $(2n - 2 - i)$ -мерный цикл z' на V_b , такой что пересечение гомологий $[z'] \cdot [z]$ ненулевое. Выберем слой $V_\epsilon \subset M$ морфизма w около V_b . По конструкции многообразия M , слои V_b и V_ϵ канонически отождествляются. Рассмотрим $(2n - 2 - i)$ -цикл z'_ϵ на V_ϵ , соответствующий z' при этой идентификации. Мы будем рассматривать z'_ϵ как $(2n - 2 - i)$ -цикл на открытом многообразии $M \setminus V_b$. Пусть $[z'_\epsilon] \in H_{2n-2-i}(M \setminus V_b)$ — его класс гомологий. Существует совершенное спаривание двойственности Лефшеца (см. [Sp81, Theorem 6.2.19])

$$H_{2n-2-i}(M \setminus V_b) \times H_{i+1}(M, V_b) \rightarrow \mathbb{C},$$

определенное через пересечение циклов. По конструкции, существует равенство чисел пересечения

$$[z'_\epsilon] \cdot L_i[z] = \pm [z'] \cdot [z] \neq 0.$$

Отсюда $L_i[z] \neq 0$. □

Определение 3.37. Для каждого i определим эндоморфизм $T: H_i(M, V_b) \rightarrow H_i(M, V_b)$ как $T = \text{id} + L_{i-1}\partial_i$ и эндоморфизм $T: H_i(M) \rightarrow H_i(M)$ как $T = \text{id}$. (В частности, $T = \text{id}$ на $H_0(M, V_b)$.)

Следствие 3.38. (i) Для каждого i образом отображения β_i является пространство T -инвариантов пространства $H_i(M, V_b)^T$.

(ii) Для каждого i ядро отображения $\alpha_i: H_i(V_b) \rightarrow H_i(M)$ содержит подпространство $(T - \text{id})H_i(V_b)$. Следовательно, α_i пропускается через пространство коинвариантов $H_i(V_b)_T$.

(iii) Длинная точная последовательность (3.34) согласована с эндоморфизмами T .

Доказательство. (i) Для $u \in H_i(M)$ имеем

$$T(\beta_i(u)) = \beta_i(u) + L_{i-1}\partial_i\beta_i(u) = \beta_i(u).$$

Обратно, пусть $y \in H_i(M, V_b)^T$. Тогда $T(y) = y + L_{i-1}\partial_i(y) = y$, то есть $L_{i-1}\partial_i(y) = 0$. Однако гомоморфизм L_{i-1} инъективен по предложению 3.36. Отсюда $\partial_i(y) = 0$, то есть y лежит в образе отображения β_i .

(ii) По лемме 3.35, для $x \in H_i(V_b)$ выполнено

$$\partial_{i+1}L_i(x) = T(x) - x,$$

а, значит, образ отображения ∂_{i+1} содержит $(T - \text{id})H_i(V_b)$.

(iii) Согласованность отображений α_i и β_i с T следует из (i) и (ii).

Пусть $y \in H_{i+1}(M, V_b)$. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_{i+1}T(y) &= \partial_{i+1}(y + L_i\partial_{i+1}(y)) \\ &= \partial_{i+1}(y) + \partial_{i+1}L_i\partial_{i+1}(y) \\ &= \partial_{i+1}(y) + (T - \text{id})\partial_{i+1}(y) \\ &= T\partial_{i+1}(y). \end{aligned}$$

Это доказывает следствие. □

Вложение пар $(M, V_b) \subset (V, V_b)$ индуцирует морфизм последовательностей гомологий

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_i(M) & \rightarrow & H_i(M, V_b) & \xrightarrow{\partial_i} & H_{i-1}(V_b) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow \gamma_i & & \parallel & & \\ \dots & \rightarrow & H_i(V) & \rightarrow & H_i(V, V_b) & \xrightarrow{\partial_i} & H_{i-1}(V_b) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Определение 3.39. Для каждого $i \geq 0$ определим эндоморфизм

$$T: H_i(V, V_b) \rightarrow H_i(V, V_b)$$

как композицию

$$T(y) = y + \gamma_i L_{i-1} \partial_i(y)$$

для $y \in H_i(V, V_b)$. В частности, $T = \text{id}$ на $H_0(V, V_b)$. Определим также $T: H_i(V) \rightarrow H_i(V)$ как тождественный оператор.

По двойственности это определяет операторы T на когомологиях $H^i(V_b)$, $H^i(V, V_b)$, $H^i(V)$.

Следствие 3.40. *Последовательность*

$$\dots \rightarrow H_i(V) \rightarrow H_i(V, V_b) \rightarrow H_{i-1}(V_b) \rightarrow \dots$$

согласована с эндоморфизмами T . Значит, двойственная последовательность когомологий

$$\dots \rightarrow H^{i-1}(V_b) \rightarrow H^i(V, V_b) \rightarrow H^i(V) \rightarrow \dots$$

согласована с T .

Доказательство. Это напрямую следует из определения операторов T и формулы из леммы 3.35. □

Предложение 3.41. (i) *Предположим, что морфизм $\gamma_i: H_i(M, V_b) \rightarrow H_i(V, V_b)$ инъективен. Тогда образом морфизма $H_i(V) \rightarrow H_i(V, V_b)$ является пространство T -инвариантов $H_i(V, V_b)^T$.*

(ii) *Если $H^{2n-i-1}(V) = 0$, то отображение $H_i(M, V_b) \rightarrow H_i(V, V_b)$ инъективно. Следовательно, по (i) образом морфизма $H_i(V) \rightarrow H_i(V, V_b)$ является пространство T -инвариантов $H_i(V, V_b)^T$.*

Доказательство. (i) Так как T действует тривиально на $H_i(V)$, и отображение $H_i(V) \rightarrow H_i(V, V_b)$ согласовано с T , его образ содержится в пространстве $H_i(V, V_b)^T$. Обратно, если $y \in H_i(V, V_b)^T$, то $y = y + \gamma_i L_{i-1} \partial_i(y)$, то есть $\gamma_i L_{i-1} \partial_i(y) = 0$. Отсюда по предположению $L_{i-1} \partial_i(y) = 0$. Однако отображение L_{i-1} инъективно по предложению 3.36, а, значит, $\partial_i(y) = 0$, то есть y лежит в образе отображения $H_i(V) \rightarrow H_i(V, V_b)$.

(ii) Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \rightarrow & H_i(V_b) & \rightarrow & H_i(M) & \rightarrow & H_i(M, V_b) & \xrightarrow{\partial_i} & H_{i-1}(V_b) & \rightarrow & \dots \\
& & \parallel & & \downarrow \delta_i & & \downarrow \gamma_i & & \parallel & & \\
\dots & \rightarrow & H_i(V_b) & \rightarrow & H_i(V) & \rightarrow & H_i(V, V_b) & \xrightarrow{\partial_i} & H_{i-1}(V_b) & \rightarrow & \dots
\end{array}$$

Из простого диаграммного поиска следует, что если δ_i инъективно, то инъективно и γ_i .

Пусть $\Delta \subset \mathbb{P}^1$ — замкнутый диск, содержащий ∞ и ограниченный петлей C . Пусть $\Delta^0 = \Delta \setminus C$ — его внутренность. Наконец, пусть $W \subset V$ — дополнение к прообразу $w^{-1}(\Delta^0)$. Тогда W является компактным многообразием с границей M . Заметим, что вложение $W \subset V$ является гомотопической эквивалентностью, так как морфизм w не имеет критических значений в $\Delta \setminus \{\infty\}$. Значит, достаточно доказать, что отображение $H_i(M) \rightarrow H_i(W)$ инъективно. Это отображение является частью длинной точной последовательности

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(W, M) \rightarrow H_i(M) \rightarrow H_i(W) \rightarrow \dots$$

Поэтому достаточно показать, что если выполнено $H^{2n-i-1}(W) = 0$, то $H_{i+1}(W, M) = 0$. Это следует из двойственности Лефшеца

$$H^{2n-q}(W) \simeq H_q(W, M)$$

для компактного ориентированного $2n$ -мерного многообразия W с границей ([Sp81, Theorem 6.2.20]).

□

3.3.2. Топология рациональных эллиптических поверхностей. Мы будем использовать обозначения начала параграфа для специального случая, который мы будем рассматривать до конца параграфа. Зафиксируем число $0 \leq d \leq 9$ и пусть $f: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ — рациональная эллиптическая поверхность, такая, что дивизор $D = D^v = f^{-1}(\infty)$ является колесом I_d из

d гладких рациональных кривых для $d \geq 2$, рациональной кривой с одним нодом для I_1 для $d = 1$ и гладкой эллиптической кривой I_0 для $d = 0$. Предположим вдобавок, что существует сечение $\mathbb{P}^1 \rightarrow E \subset Z$. Напомним, что $Y = Z \setminus D$.

Так как поверхность Z рациональна, то $\chi(\mathcal{O}_Z) = 1$. Имеем $-K_Z = D$, см., к примеру, [ISh89, §10.2]. Значит, $c_1^2(Z) = 0$, так что по формуле Нетера топологическая эйлерова характеристика для поверхности Z равна 12. Это значит, что

$$h^i(Z) = \begin{cases} 1, & i = 0, 4; \\ 10, & i = 2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По формуле присоединения $(K_Z + E) \cdot E = 2g(E) - 2 = -2$, так что $E^2 = -1$.

Лемма 3.42. (i) Если $d = 0$, то

$$h^i(D) = \begin{cases} 1, & i = 0, 2; \\ 2, & i = 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(ii) Если $d > 0$, то

$$h^i(D) = \begin{cases} 1, & i = 0, 1; \\ d, & i = 2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Часть (i) очевидна. Докажем часть (ii). Пусть p_1, \dots, p_d — точки пересечения компонент дивизора D . Пусть $\pi: \tilde{D} \rightarrow D$ — нормализация этого дивизора. Тогда \tilde{D} является несвязным объединением d копий проективной прямой \mathbb{P}^1 . Рассмотрим точную последовательность пучков на D

$$(3.43) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C}_D \rightarrow \pi_* \pi^* \mathbb{C}_D \rightarrow \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{C}_{p_i} \rightarrow 0,$$

в которой \mathbb{C}_{p_i} — пучок-небоскрёб с носителем в p_i . Заметим, что

$$\dim H^i(D, \pi_*\pi^*\mathbb{C}_D) = \dim H^i(\tilde{D}) = \begin{cases} d, & i = 0, 2; \\ 0, & i = 1. \end{cases}$$

Также заметим, что $H^0(D, \mathbb{C}_D) = \mathbb{C}$, и отображение

$$H^0(D, \mathbb{C}_D) \rightarrow H^0(D, \pi_*\pi^*\mathbb{C}_D)$$

инъективно. Утверждение леммы следует теперь из длинной точной последовательности когомологий, примененной к короткой точной последовательности (3.43). \square

Лемма 3.44. *Отображение ограничения $s: H^2(Z) \rightarrow H^2(D)$ сюръективно.*

Доказательство. Так как поверхность Z рациональна, имеем $NS(Z) \otimes \mathbb{C} = H^2(Z)$. Имеем также $NS(D) \otimes \mathbb{C} = H^2(D)$, так как $H^2(D, \mathcal{O}_D) = 0$. Таким образом, достаточно показать, что отображение ограничения

$$NS(Z) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow NS(D) \otimes \mathbb{Q}$$

сюръективно.

Если d равно 0 или 1, то кривая D неприводима, так что пространство $NS(D) \otimes \mathbb{Q}$ одномерно и порождено первым классом Черна любого обильного линейного расслоения. Поэтому достаточно взять обильное расслоение на Z и ограничить его на D .

Предположим теперь, что $d \geq 2$, что значит, что дивизор D является колесом из гладких рациональных кривых. Пусть D_1, \dots, D_d — его неприводимые компоненты. Заметим сперва, что существует изоморфизм $NS(D) \cong \mathbb{Z}^d$, заданный отображением

$$\text{Pic}(D) \ni \mathcal{L} \rightarrow (\deg \mathcal{L}|_{D_1}, \dots, \deg \mathcal{L}|_{D_d}).$$

Далее, для каждого i выполнено

$$-2 = \deg K_{D_i} = D_i \cdot (D_i + K_Z) = D_i^2.$$

Это значит, что матрица Грамма $(D_i \cdot D_j)$ равна

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для доказательства требуемой сюръективности достаточно найти такие дивизоры F_1, \dots, F_d на поверхности Z , что матрица пересечения $(F_i \cdot D_j)$ невырождена. Сечение E пересекает единственную компоненту дивизора D , скажем D_d , так как $E \cdot D = 1$. Поэтому $E \cdot D_d = 1$ и $E \cdot D_i = 0$ для $i \neq d$. Взяв $F_1 = D_1, \dots, F_{d-1} = D_{d-1}, F_d = E$, получим матрицу пересечения $(F_i \cdot D_j)$, равную

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

дискриминант которой равен $(-1)^{d-1}d$. □

Вычислим теперь когомологии с компактным носителем $H_c^i(Y)$ поверхности Y .

Лемма 3.45. *Выполнены следующие равенства.*

$$h_c^i(Y) = h^i(Z, j_! \mathbb{C}_Y) = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, 3; \\ 11 - d, & i = 2; \\ 1, & i = 4. \end{cases}$$

Доказательство. Первое равенство следует из того факта, что поверхность Z компактна. Для второго равенства рассмотрим короткую точную последовательность пучков

$$0 \rightarrow j_! \mathbb{C}_Y \rightarrow \mathbb{C}_Z \rightarrow \mathbb{C}_D \rightarrow 0.$$

Для $d = 0$ по лемме 3.42(i) индуцированная длинная точная последовательность когомологий $H^*(Z, -)$ имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & j_! \mathbb{C}_Y & \longrightarrow & \mathbb{C}_Z & \longrightarrow & \mathbb{C}_D \longrightarrow 0 \\ H^0 & & 0 & & \mathbb{C} & \xrightarrow{r} & \mathbb{C} \\ H^1 & & ?_1 & & 0 & & \mathbb{C}^2 \\ H^2 & & ?_2 & & \mathbb{C}^{10} & \xrightarrow{s} & \mathbb{C} \\ H^3 & & ?_3 & & 0 & & 0 \\ H^4 & & \mathbb{C} & & \mathbb{C} & & 0. \end{array}$$

Для $d > 0$ по лемме 3.42(ii) та же самая длинная точная последовательность имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & j_! \mathbb{C}_Y & \longrightarrow & \mathbb{C}_Z & \longrightarrow & \mathbb{C}_D \longrightarrow 0 \\ H^0 & & 0 & & \mathbb{C} & \xrightarrow{r} & \mathbb{C} \\ H^1 & & ?_1 & & 0 & & \mathbb{C} \\ H^2 & & ?_2 & & \mathbb{C}^{10} & \xrightarrow{s} & \mathbb{C}^d \\ H^3 & & ?_3 & & 0 & & 0 \\ H^4 & & \mathbb{C} & & \mathbb{C} & & 0. \end{array}$$

Отображения r в обоих случаях, очевидно, сюръективны, так что $?_1 = 0$. По лемме 3.44, отображения s сюръективны. Отсюда $?_2 = \mathbb{C}^{11-d}$, $?_3 = 0$. \square

Следствие 3.46. *По двойственности Пуанкаре для Y имеем*

$$h^i(Y) = \begin{cases} 1, & i = 0; \\ 11 - d, & i = 2; \\ 0, & i = 1, 3, 4. \end{cases}$$

3.3.3. Числа Ходжа моделей Ландау–Гинзбурга для рациональных эллиптических поверхностей.

3.3.3.1. Числа $h^{p,q}(Y, w)$. Мы используем обозначения пункта 3.3.2.

Рассмотрим длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \rightarrow H_2(Y) \rightarrow H_2(Y, Y_b) \rightarrow H_1(Y_b) \rightarrow \dots$$

Напомним, что в пункте 3.3.1 показано, что существует согласованное действие монодромии T на каждом члене последовательности.

Следствие 3.47. *Образ отображения $H_2(Y) \rightarrow H_2(Y, Y_b)$ совпадает с пространством T -инвариантов $H_2(Y, Y_b)^T$.*

Доказательство. В обозначениях предложения 3.41 имеем $n = 2$, $i = 2$ и $H^{2n-i-1}(Y) = H^1(Y) = 0$, см. следствие 3.46. Таким образом, требуемое утверждение следует из предложения 3.41(ii). \square

Предложение 3.48. (i) *Выполнено*

$$(3.49) \quad H^k(Y, Y_b) = \begin{cases} \mathbb{C}^{12-d}, & k = 2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(ii) *Для $d > 0$ модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) имеет тип Фано, и*

$$(3.50) \quad h^{p,q}(Y, w) = \begin{cases} 1, & (p, q) = (0, 2), (2, 0); \\ 10 - d, & (p, q) = (1, 1); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(iii) *Для $d = 0$ модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) не имеет тип Фано.*

Это предложение доказывает теорему 3.33(iii) и вычисляет правую часть равенства в теореме 3.33(i).

Доказательство этого предложения займет оставшуюся часть параграфа.

Лемма 3.51. *Отображение ограничения $H^2(Y) \rightarrow H^2(Y_b)$ сюръективно. Таким образом, отображение $H_2(Y_b) \rightarrow H_2(Y)$ инъективно.*

Доказательство. Так как слой Y_b является гладкой проективной кривой, то $H^2(Y_b)$ имеет размерность один и порождено первым классом Черна $c_1(L)$ любого обильного линейного расслоения L на Y_b . Поэтому достаточно взять любое линейное расслоение M на Y , и его ограничение $L = M|_{Y_b}$ также будет обильным, так что $c_1(M) \in H^2(Y)$ ограничивается на $c_1(L) \in H^2(Y_b)$. \square

Уравнение (3.49) теперь следует из длинной точной последовательности когомологий

$$\dots \rightarrow H^i(Y, Y_b) \rightarrow H^i(Y) \rightarrow H^i(Y_b) \rightarrow \dots$$

с помощью следствия 3.46, того факта, что Y_b является эллиптической кривой, и леммы 3.51. Это доказывает часть (i) предложения.

Для доказательства частей (ii) и (iii) осталось изучить действие монодромии T на $H_2(Y, Y_b)$.

Рассмотрим часть длинной точной последовательности гомологий

$$H_3(Y, Y_b) \rightarrow H_2(Y_b) \rightarrow H_2(Y) \rightarrow H_2(Y, Y_b) \rightarrow H_1(Y_b) \rightarrow H_1(Y).$$

Мы знаем, что отображение $H_2(Y_b) \rightarrow H_2(Y)$ инъективно, и что $H_1(Y) = H^1(Y)^\vee = 0$. Значит, последовательность

$$(3.52) \quad 0 \rightarrow H_2(Y_b) \rightarrow H_2(Y) \rightarrow H_2(Y, Y_b) \rightarrow H_1(Y_b) \rightarrow 0$$

также точна. Имеем $H_2(Y_b) = \mathbb{C}$, $H_1(Y_b) = \mathbb{C}^2$, $H_2(Y) = \mathbb{C}^{11-d}$, а, значит, последовательность (3.52) изоморфна последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{11-d} \rightarrow \mathbb{C}^{12-d} \rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow 0.$$

Эти последовательности T -эквивариантны для тривиального действия оператора T на $H_2(Y_b)$ и $H_2(Y)$. По теореме Ландмана, T действует унитарно на $H_1(Y_b)$.

Для $d = 0$ слой $f^{-1}(\infty)$ гладок, и действие оператора T на $H_1(Y_b)$ тривиально. Таким образом, точная последовательность (3.52) и следствие 3.47 показывают, что действие оператора T на $H_2(Y, Y_b)$ унитарно с двумя жордановыми блоками размера 2 и восемью блоками размера 1. Это значит, что модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) не имеет тип Фано, что доказывает пункт (iii).

Для $d > 0$ слой $f^{-1}(\infty)$ особ, так что действие оператора T на $H_1(Y_b)$ нетривиально (см. [Коб3, Table 1]). Таким образом, точная последовательность (3.52) и следствие 3.47 показывают, что действие оператора T на $H_2(Y, Y_b)$ унитарно с одним жордановым блоком размера 3 и $9 - d$ блоками размера 1. Таким образом, (Y, w) имеет тип Фано, и выполнены уравнения (3.50). Это завершает доказательство предложения 3.48.

3.3.3.2. Числа $f^{p,q}(Y, w)$. Напомним, что у нас есть открытое вложение $j: Y \hookrightarrow Z$.

Лемма 3.53. *Выполнено*

$$\Omega_Z^0(\log D) = \mathcal{O}_Z \quad \text{и} \quad \Omega_Z^2(\log D) = \mathcal{O}_Z.$$

Таким образом,

$$\Omega_Z^0(\log D)(-D) = \Omega_Z^2(\log D)(-D) = \omega_Z.$$

Доказательство. Это следует из определения логарифмического комплекса в пункте 3.2.1 и того факта, что D является антиканоническим дивизором. □

Предложение 3.54. *Выполнены следующие равенства.*

$$(3.55) \quad h^i(Z, \Omega_Z^0(\log D)(-D)) = h^i(Z, \Omega_Z^2(\log D)(-D)) = \begin{cases} 0, & i=0,1; \\ 1, & i=2, \end{cases}$$

$$(3.56) \quad h^i(Z, \Omega_Z^1(\log D)(-D)) = \begin{cases} 0, & i=0,2; \\ 10-d, & i=1. \end{cases}$$

Доказательство. Так как поверхность Z рациональна, выполнено

$$h^i(Z, \mathcal{O}_Z) = \begin{cases} 1, & i=0; \\ 0, & i=1,2, \end{cases}$$

так что по двойственности Серра

$$h^i(Z, \omega_Z) = \begin{cases} 0, & i=0,1; \\ 1, & i=2. \end{cases}$$

Поэтому равенства (3.55) следуют из леммы 3.53.

Для доказательства равенства (3.56) заметим, что комплекс

$$\Omega_Z^0(\log D)(-D) \rightarrow \Omega_Z^1(\log D)(-D) \rightarrow \Omega_Z^2(\log D)(-D) \rightarrow 0$$

является резольвентой пучка $j_!\mathbb{C}_Y$, см, к примеру, [DI87, стр. 268]. Это дает спектральную последовательность

$$E_1^{pq} = H^p(Z, \Omega_Z^q(\log D)(-D)),$$

которая сходится к $H^{p+q}(Z, j_!\mathbb{C}_Y)$. Известно, что эта спектральная последовательность вырождается в члене E_1 , см. [DI87, Corollarie 4.2.4]. Это значит, что

$$\begin{aligned} h^*(Z, j_!\mathbb{C}_Y) &= h^*(Z, \Omega_Z^0(\log D)(-D)) + \\ &+ h^{*-1}(Z, \Omega_Z^1(\log D)(-D)) + h^{*-2}(Z, \Omega_Z^2(\log D)(-D)). \end{aligned}$$

Равенства (3.55) означают, что (численный) член E_1 этой спектральной последовательности следующий:

1	h^2	1
0	h^1	0
0	h^0	0
$\Omega_Z^0(\log D)(-D)$	$\Omega_Z^1(\log D)(-D)$	$\Omega_Z^2(\log D)(-D)$.

Таким образом, используя лемму 3.45, мы получаем равенства

$$h^0(Z, \Omega_Z^1(\log D)(-D)) = 0,$$

$$h^1(Z, \Omega_Z^1(\log D)(-D)) + 1 = 11 - d,$$

$$h^2(Z, \Omega_Z^1(\log D)(-D)) = 0,$$

которые доказывают равенство (3.56). □

Предложение 3.57. *Существуют изоморфизмы*

(i) $\Omega_Z^0(\log D, f) = \mathcal{O}_Z(-D) = \omega_Z;$

(ii) $\Omega_Z^2(\log D, f) = \Omega_Z^2(\log D) = \mathcal{O}_Z.$

(iii) *Существует короткая точная последовательность пучков на Z*

$$0 \rightarrow \Omega_Z^1(\log D)(-D) \rightarrow \Omega_Z^1(\log D, f) \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0.$$

Доказательство. Пусть t — локальная координата на \mathbb{P}^1 в окрестности ∞ . Так как дивизор $D = f^{-1}(\infty)$ имеет простые нормальные пересечения, локально он является нулями многочлена xy на \mathbb{A}^2 . Имеем

$$t = \frac{1}{f(x, y)} = xy,$$

так что

$$df = d\left(\frac{1}{xy}\right) = \frac{-1}{xy} \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right).$$

(i) Выполнено $\Omega_Z^0(\log D) = \mathcal{O}_Z$. Для любой функции $g \in \mathcal{O}_Z$ выполнено

$$df \wedge g = \frac{-g}{xy} \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right).$$

Таким образом, g должна делиться на xy , чтобы лежать в $\Omega_Z^0(\log D, f)$.

(ii) Имеем

$$\Omega_Z^2(\log D, f) = \Omega_Z^2(\log D) = \omega_Z \otimes \omega_Z^{-1} = \mathcal{O}_Z.$$

(iii) Доказательство состоит из нескольких утверждений.

Утверждение 1. Вложение $f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \subset \Omega_Z^1$ индуцирует вложение

$$f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty) \subset \Omega_Z^1(\log D, f).$$

Действительно, пучок $\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty)$ локально в окрестности ∞ порожден

$$\frac{dt}{t} = \frac{d(xy)}{xy} = \frac{ydx + xdy}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y},$$

что означает, что $f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty) \subset \Omega_Z^1(\log D)$, и тогда

$$f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty) \subset \Omega_Z^1(\log D, f).$$

Утверждение 2. Имеем вложение $\Omega_Z^1(\log D)(-D) \subset \Omega_Z^1(\log D, f)$.

Действительно, локальное сечение пучка $\Omega_Z^1(\log D)(-D)$ около D задается как $s = xy(g_1 \frac{dx}{x} + g_2 \frac{dy}{y})$, где $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_Z$. Тогда

$$df \wedge s = -(g_2 - g_1) \frac{dx \wedge dy}{xy}.$$

Утверждение 3. Пересечение $\Omega_Z^1(\log D)(-D) \cap f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty)$ подпучков пучка $\Omega_Z^1(\log D, f)$ равно $f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty)(-\infty)$.

Действительно, пучок $\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty)(-\infty)$ в окрестности ∞ порожден

$$t \frac{dt}{t} = xy \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right) \in \Omega_Z^1(\log D)(-D) \cap f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty).$$

Отсюда

$$f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty)(-\infty) \subset \Omega_Z^1(\log D)(-D) \cap f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty).$$

Обратно, пусть форма

$$\eta = h(t) \frac{dt}{t} \in \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty)$$

такая, что

$$\eta = h(xy) \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right) \in \Omega^1(\log D)(-D).$$

Тогда $h(xy)$ делится на xy , то есть h обращается в ноль в ∞ , так что $\eta \in \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty)(-\infty)$.

Утверждение 4. Выполнено неравенство

$$\Omega_Z^1(\log D, f) = \Omega_Z^1(\log D)(-D) + f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}(\log \infty).$$

Действительно, пусть $\omega = g_1 \frac{dx}{x} + g_2 \frac{dy}{y}$, где $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_Z$, — локальное сечение пучка $\Omega_Z^1(\log D, f)$ в окрестности D . Тогда $\omega = 1/2(\omega_1 + \omega_2)$, где

$$\omega_1 = (g_1 + g_2) \frac{dx}{x} + (g_1 + g_2) \frac{dy}{y}$$

и

$$\omega_2 = (g_1 - g_2) \frac{dx}{x} + (g_2 - g_1) \frac{dy}{y}.$$

Имеем

$$\omega_1 = (g_1 + g_2) \frac{dt}{t} \in f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}(\log \infty),$$

и, таким образом, по предположению,

$$df \wedge \omega_2 = 2(g_1 - g_2) \frac{dx \wedge dy}{(xy)^2} \in \Omega^2(\log D),$$

откуда следует, что функция $(g_1 - g_2)$ делится на xy , а значит $\omega_2 \in \Omega_Z^1(\log D)(-D)$. Это доказывает утверждение 4.

Мы готовы к доказательству предложения 3.57. Сперва заметим, что фактор $\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty)/\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log \infty)(-\infty)$ изоморфен пучку-небоскребу \mathbb{C}_∞ . Затем, из утверждения 3 и утверждения 4 следует, что существует изоморфизм факторов

$$\begin{aligned} \Omega_Z^1(\log D, f)/\Omega_Z^1(\log D)(-D) &\simeq \\ &\simeq f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}(\log \infty)/f^*\Omega_{\mathbb{P}^1}(\log \infty)(-\infty) = f^*\mathbb{C}_\infty = \mathcal{O}_D, \end{aligned}$$

что доказывает часть (iii) предложения. □

Предложение 3.58. *Вложение пучков $\Omega_Z^1(\log D)(-D) \subset \Omega_Z^1(\log D, f)$ индуцирует изоморфизм когомологий*

$$H^*(Z, \Omega_Z^1(\log D)(-D)) \simeq H^*(Z, \Omega_Z^1(\log D, f)).$$

Доказательство. Согласно предложению 3.66(iii), существует короткая точная последовательность пучков

$$(3.59) \quad 0 \rightarrow \Omega_Z^1(\log D)(-D) \rightarrow \Omega_Z^1(\log D, f) \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0.$$

Имеем

$$h^i(Z, \mathcal{O}_D) = \begin{cases} 1, & i = 0, 1; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и, по предложению 3.54,

$$h^i(Z, \Omega_Z^1(\log D)(-D)) = \begin{cases} 0, & i=0,2; \\ 10-d, & i=1. \end{cases}$$

Отсюда, утверждение предложения эквивалентно обращению в ноль граничного отображения

$$H^0(Z, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(Z, \Omega_Z^1(\log D)(-D)).$$

Пусть $i: E \hookrightarrow Z$ — вложение сечения эллиптического расслоения Z . Рассмотрим ограничение последовательности (3.59) на E :

$$(3.60) \quad 0 \rightarrow i^*\Omega_Z^1(\log D)(-D) \rightarrow i^*\Omega_Z^1(\log D, f) \rightarrow i^*\mathcal{O}_D \rightarrow 0.$$

Так как E является сечением отображения f , оно пересекает дивизор D трансверсально (в гладкой точке дивизора D). Таким образом, последовательность (3.60) также короткая точная. Мы отождествим $E = \mathbb{P}^1$; так что $E \cap D = \infty$ и $i^*\mathcal{O}_D = \mathbb{C}_\infty$. Отображение $i^*: H^0(Z, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^0(E, \mathbb{C}_\infty)$ является изоморфизмом, так что достаточно доказать, что граничное отображение

$$(3.61) \quad H^0(E, \mathbb{C}_\infty) \rightarrow H^1(E, i^*\Omega_Z^1(\log D)(-D))$$

не равно нулю.

Утверждение. Последовательность (3.60) изоморфна прямой сумме коротких точных последовательностей

$$(3.62) \quad 0 \rightarrow \Omega_E^1(\log \infty)(-\infty) \rightarrow \Omega_E^1(\log \infty) \rightarrow \mathbb{C}_\infty \rightarrow 0$$

и

$$0 \rightarrow N_{E/Z}^*(-D) \xrightarrow{=} N_{E/Z}^*(-D) \rightarrow 0 \rightarrow 0.$$

Действительно, существует каноническая короткая точная последовательность векторных расслоений на E

$$(3.63) \quad 0 \rightarrow N_{E/Z}^* \rightarrow i^*\Omega_Z^1 \rightarrow \Omega_E^1 \rightarrow 0$$

с каноническим расщеплением $i^*f^*: \Omega_E^1 \rightarrow \Omega_Z^1$ (мы отождествляем E и \mathbb{P}^1).

Последовательность (3.63) индуцирует следующую коммутативную диаграмму с точными строками

$$(3.64) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & N_{E/Z}^* & \rightarrow & i^*\Omega_Z^1(\log D) & \rightarrow & \Omega_E^1(\log \infty) & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & N_{E/Z}^*(-D) & \rightarrow & i^*\Omega_Z^1(\log D, f) & \rightarrow & \Omega_E^1(\log \infty) & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & N_{E/Z}^*(-D) & \rightarrow & i^*\Omega_Z^1(\log D)(-D) & \rightarrow & \Omega_E^1(\log \infty)(-\infty) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Действительно, все строки индуцированы последовательностью (3.63), так что третья строка, очевидно, точна. Вертикальные отображения являются каноническими вложениями, так что ясно, что вся диаграмма коммутативна. Осталось доказать точность двух первых строк.

Существуют локальные координаты x, t на Z в окрестности $\infty \in E$, такие, что

$$E = \{x = 0\} \quad \text{и} \quad D = \{t = 0\}.$$

Тогда $f = \frac{1}{t}$, и пучок $\Omega_Z^1(\log D)$ (соответственно $\Omega_Z^1(\log D, f)$) локально порожден формами $dx, \frac{dt}{t}$ (соответственно $tdx, \frac{dt}{t}$). Это влечет точность первых двух строк и доказывает утверждение.

Теперь мы можем дополнить две нижние строки диаграммы (3.64) до коммутативной диаграммы с точными строками и столбцами:

(3.65)

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{C}_\infty & \rightarrow & \mathbb{C}_\infty & \rightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 \rightarrow & N_{E/Z}^*(-D) & \rightarrow & i^*\Omega_Z^1(\log D, f) & \rightarrow & \Omega_E^1(\log \infty) & \rightarrow 0 \\
& & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
0 \rightarrow & N_{E/Z}^*(-D) & \rightarrow & i^*\Omega_Z^1(\log D)(-D) & \rightarrow & \Omega_E^1(\log \infty)(-\infty) & \rightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & 0 & & 0 & & 0.
\end{array}$$

Теперь диаграмма (3.65), рассматриваемая как короткая точная последовательность столбцов, расщепляется, как и выше, отображениями i^*f^* . Это доказывает утверждение.

Теперь мы можем завершить доказательство предложения 3.58. Заметим, что последовательность (3.62) изоморфна естественной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_E(-2) \rightarrow \mathcal{O}_E(-1) \rightarrow \mathbb{C}_\infty \rightarrow 0,$$

в которой граничное отображение $H^0(E, \mathbb{C}_\infty) \rightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E(-2))$ является изоморфизмом. Отсюда, используя приведенное выше утверждение, мы видим, что граничное отображение (3.61) является ненулевым, что завершает доказательство предложения 3.58. \square

Предложение 3.66. *Выполнено*

$$f^{p,q}(Y, w) = \begin{cases} 1, & (p, q) = (0, 2), (2, 0); \\ 10 - d, & (p, q) = (1, 1); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Предложение 3.54 и лемма 3.57 дает

$$f^{p,0}(Y, w) = h^p(Z, \Omega_Z^0(\log D, f)) = h^p(Z, \omega_Z) = \begin{cases} 0, & p=0,1; \\ 1, & p=2, \end{cases}$$

$$f^{p,1}(Y, w) = h^p(Z, \Omega_Z^1(\log D, f)) = h^p(Z, \Omega_Z^1(\log D)(-D)) = \begin{cases} 0, & p=0,2; \\ 10 - d, & p=1 \end{cases}$$

и

$$f^{p,2}(Y, w) = h^p(Z, \Omega_Z^2(\log D, f)) = h^p(Z, \mathcal{O}_Z) = \begin{cases} 1, & i=0; \\ 0, & i=1,2. \end{cases}$$

□

Это предложение вычисляет левую часть равенств из теоремы 3.33(i) и теоремы 3.33(ii) и, вместе с предложением 3.48, завершает доказательство теоремы 3.33.

3.3.4. Конец доказательства теоремы 3.33 и обсуждение. Изучение эллиптических поверхностей в пункте 3.3.3 мотивировано конструкциями зеркальной симметрии для поверхностей дель Пеццо из [АКО06]. В этой работе авторы доказывают “половину” гипотезы гомологической зеркальной симметрии для поверхностей дель Пеццо. Более точно они доказывают, что для общей поверхности дель Пеццо S_d степени d , $1 \leq d \leq 9$, полученной из \mathbb{P}^2 раздутием $9 - d$ общих точек, существует комплексифицированная симплектическая форма ω_Y на (Y, w) , где (Y, w) имеет $12 - d$ нодальных особых слоев, и что Y может быть компактифицирована до поверхности Z , для которой дивизор D является колесом из d кривых, так что

$$(3.67) \quad D^b(\text{coh } S_d) \simeq FS(Y, w, \omega_Y).$$

Мы будем называть (Y, w) моделью Ландау–Гинзбурга для S_d . Мы также допускаем случай $d = 0$; тогда (Y, w) является моделью Ландау–Гинзбурга для плоскости \mathbb{P}^2 , раздутой в 9 точках пересечения двух эллиптических кривых, см. [АКО06]. Эквивалентность (3.67) выполнена также и в этом случае.

Замечание 3.68. Описание поверхности дель Пеццо X степени d как раздутия \mathbb{P}^2 дает следующие равенства:

$$h^{p,q}(X) = \begin{cases} 1, & (p, q) = (0, 2), (2, 0); \\ 10 - d, & (p, q) = (1, 1); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Это замечание, вместе с предложением 3.48 и предложением 3.66, дает доказательство части (ii) теоремы 3.33 и, таким образом, завершает доказательство этой теоремы. Другими словами, гипотеза 3.29 и “половина” гипотезы 3.28 выполнено для (зеркальных партнеров) поверхностей дель Пеццо.

Замечание 3.69. Вторая часть гипотезы 3.28 не выполнена уже для модели Ландау–Гинзбурга (Y, w) для \mathbb{P}^2 . Действительно, имеем $h^{0,0}(Y, w) = h^{1,1}(Y, w) = h^{2,2}(Y, w) = 1$. Однако модель Ландау–Гинзбурга (Y, w) имеет в точности три особых слоя, и особым множеством каждого слоя является простой нод. Значит, целые числа $i^{p,q}(Y, w)$ делятся на 3.

Замечание 3.70. Поверхности дель Пеццо являются раздутиями плоскости \mathbb{P}^2 за одним исключением, а именно, за исключением квадрики. Однако торическая модель Ландау–Гинзбурга для квадрики, согласно параграфу 3.1, является эллиптическим пучком со приведенным слоем над бесконечностью, который является колесом из 8 кривых. Таким образом, утверждение теоремы 3.33 выполнено и для квадрики.

Замечание 3.71. Для модели Ландау–Гинзбурга (Y, w) многообразия X , снабженного тривиальным дивизором, $\dim X = \dim Y = n$, число Ходжа

$h^{1,1}(Y, w)$, имеет следующую (гипотетическую) интерпретацию, см. гипотезу 7.1. Пусть k_Y — это число неприводимых компонент (без кратностей) приводимых слоев суперпотенциала w минус число самих неприводимых слоев. Тогда $h^{1,1}(Y, w) = k_Y$. Отсюда из гипотезы 3.28 и 3.29 следует, что $k_Y = h^{1,n-1}(X)$. Эта гипотеза доказана в части 7 для трехмерных многообразий Фано основной серии и для полных пересечений Фано.

Часть 4. Трехмерные многообразия Фано

Эта часть посвящена наиболее изученному случаю торических моделей Ландау–Гинзбурга — моделей для трехмерных многообразий Фано. Основным интересом будет уделен случаю многообразий с числом Пикара 1.

4.1. СЛАБЫЕ МОДЕЛИ ЛАНДАУ–ГИНЗБУРГА

Рассмотрим гладкое трехмерное многообразие Фано X с числом Пикара ρ и дивизор D на нем. Напомним, что такой паре мы сопоставляем регуляризованный ряд $\tilde{I}^{X,D}$ и, в частности, свободный член этого ряда $\tilde{I}_0^{X,D}$. Эти ряды определяются теорией пересечений (кривых и дивизоров) на X рядом $\tilde{I}^X = \tilde{I}^{X,0}$, см. начало части 2, или даже рядом I_0^X , см. [Prz08a]. Они, по соображениям размерности, зависят от четной части когомологий многообразия X , которая устроена достаточно просто: $H^0(X, \mathbb{Z}) = H^6(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^2(X, \mathbb{Z}) = H^4(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\rho$. Из соотношений на инварианты Громова–Виттена следует, что они зависят от конечного (небольшого) числа трехточечных инвариантов Громова–Виттена, более подробно см., к примеру, [Prz08a]. Для трехмерных многообразий Фано основной серии (то есть для случая $\rho = 1$) эти трехточечные инварианты были найдены, используя результаты Гивенталья, Фултона–Вудворда и других, см. [Prz07a], [Prz07b] и ссылки в этих работах. Теорема Гивенталья (см. теорему 5.11 и теорему 6.13) позволяют вычислить ряд \tilde{I}_0^X для полных пересечений в гладких торических многообразиях или грассманианах. Трехмерные многообразия Фано с $\rho > 1$ допускают такое описание, и соответствующие ряды \tilde{I}_0^X были вычислены в [CCGK16], см. также [CCG⁺]. Если не оговорено особо, нам потребуются именно ряд \tilde{I}_0^X , так что нам не будут нужны детали теории пересечений на X . В дальнейшем ряд \tilde{I}_0^X предполагается известным.

Будем считать, что $D = 0$. Напомним, что многочлен Лорана f_X называется слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X , если он удовлетворяет условию

периодов, то есть если его главный период (см. определение 2.2) совпадает с рядом I_0^X . Существует 105 семейств гладких многообразий Фано, см., к примеру, [IP99] и [MM82]. У 98 из них антиканонический класс очень обилен. Для каждого известна слабая модель Ландау–Гинзбурга, чаще всего не одна: для случая очень обильного антиканонического класса см. [CCG⁺], а для оставшихся семи случаев см. предложение 4.1. Однако мы опишем методы, которыми их можно найти, и изучим некоторые их свойства; нам это понадобится в дальнейшем.

Гладкие трехмерные многообразия Фано, антиканонический класс которых не очень обилен, могут быть описаны как полные пересечения в гладких торических многообразиях, поэтому для них возможно выписать модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья (см. определение 5.4), и для них выполнено условие периодов.

Предложение 4.1 (ср. предложение 4.11). *Многообразия Фано X_{1-1} , X_{1-11} , X_{2-1} , X_{2-2} , X_{2-3} , X_{9-1} и X_{10-1} имеют слабые модели Ландау–Гинзбурга.*

Доказательство. Многообразии Фано X_{1-1} является гиперповерхностью степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$. Многообразии Фано X_{1-11} является гиперповерхностью степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$. Многообразии Фано X_{2-1} является гиперповерхностью типа $(1, 1)$ в $\mathbb{P}^1 \times X_{1-11}$ в антиканоническом вложении; другими словами, оно является полным пересечением гиперповерхностей типов $(1, 1)$ и $(0, 6)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$. Многообразии Фано X_{2-2} является гиперповерхностью в некотором торическом многообразии, см. [CCGK16]. Многообразии Фано X_{2-3} является гиперповерхностью типа $(1, 1)$ в $\mathbb{P}^1 \times X_{1-12}$ в антиканоническом вложении; другими словами, оно является полным пересечением гиперповерхностей типов $(1, 1)$ и $(0, 4)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$. Наконец, $X_{9-1} = \mathbb{P}^1 \times S_2$ и $X_{10-1} = \mathbb{P}^1 \times S_1$.

Для многообразий X_{i-j} построим их модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья. Далее представим его многочленом Лорана f_{i-j} , см., в частности,

формулу 5.16. По [CCG⁺] он удовлетворяет условию периодов. Рассмотрим эти случаи по одному.

Моделью Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья для X_{2-1} является полное пересечение

$$\begin{cases} u + v_0 = 0, \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$$

в $\text{Spec } \mathbb{T}[u, v_0, v_1, v_2, v_3]$ с функцией

$$u + \frac{1}{u} + v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \frac{1}{v_1 v_2^2 v_3^3},$$

см. определение 5.4. После бирациональной замены переменных

$$v_1 = \frac{x}{x+y+1}, \quad v_2 = \frac{y}{x+y+1}, \quad v_3 = \frac{1}{x+y+1}, \quad u = \frac{z}{z+1}, \quad v_0 = \frac{1}{z+1}$$

получим, с точностью до аддитивного сдвига, функцию

$$f_{2-1} = \frac{(x+y+1)^6(z+1)}{xy^2} + \frac{1}{z}$$

на торе $\text{Spec } \mathbb{T}[x, y, z]$.

Похожим образом получаются слабые модели Ландау–Гинзбурга и для остальных многообразий. Имеем

$$\begin{aligned} f_{1-1} &= \frac{(x+y+z+1)^6}{xyz}, \\ f_{1-11} &= \frac{(x+y+1)^6}{xy^2z} + z, \\ f_{2-2} &= \frac{(x+y+z+1)^2}{x} + \frac{(x+y+z+1)^4}{yz}, \\ f_{2-3} &= \frac{(x+y+1)^4(z+1)}{xyz} + z + 1, \\ f_{9-1} &= x + \frac{1}{x} + \frac{(y+z+1)^4}{yz}, \\ f_{10-1} &= \frac{(x+y+1)^6}{xy^2} + z + \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

□

Таким образом, можно считать, что антиканонический класс многообразия X очень обилен. Для нахождения слабой модели для X можно, как и в предложении 4.1, построить модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья и пытаться находить бирациональные изоморфизмы тотальных пространств этих моделей с тором (ср. теорему 6.1). Однако мы воспользуемся другим подходом. А именно, мы будем рассматривать “хорошие” трехмерные многогранники и изучать “правильные” многочлены Лорана с носителем в них (в частности, их коэффициенты будут достаточно симметричные). На данный момент наиболее правильным является еще большее обобщение описываемых ниже многочленов Лорана, см. замечание 4.4. Однако оно нам для наших целей не понадобится.

Слабые модели Ландау–Гинзбурга, “угаданные” исходя из соображения условия периодов (см. [Prz08b]) или полученные из моделей Ландау–Гинзбурга полных пересечений, имели, во-первых, рефлексивные многогранники Ньютона, а во-вторых, для них был выполнен *биномиальный принцип*. Он предписывает расстановку коэффициентов многочлена Лорана с фиксированным многогранником Ньютона. А именно, вершинам многогранника следует присвоить коэффициент 1, а i -той (с любого конца) целой точке ребра целочисленной длины n следует присвоить $\binom{n}{i}$. Этот принцип применим во многих случаях (другими словами, для многогранников Ньютона торических многообразий с особенностями типа sDV , то есть теми, у которых целочисленные точки веерного многогранника (кроме центра координат) лежат на ребрах). Большинство гладких трехмерных многообразий Фано имеет вырождения к торическим многообразиям с sDV особенностями, однако, к сожалению, не все. Поэтому мы будем использовать следующее обобщение биномиального принципа.

Определение 4.2 (см. [CCGK16]). Говорят, что целочисленный многоугольник имеет тип A_n , $n \geq 0$, если он является треугольником, две стороны которого имеют целую длину 1, а оставшаяся имеет целую длину n . (Другими словами, его целочисленными точками являются 3 вершины и $n - 1$ точек, лежащих на одной и той же стороне.) В частности, A_0 является отрезком целой длины 1.

Говорят, что целочисленный многоугольник P имеет тип Минковского, если он является суммой Минковского нескольких многоугольников типа A_n , то есть если

$$P = \{p_1 + \dots + p_k \mid p_i \in P_i\}$$

для некоторых многоугольников P_i типа A_{k_i} , и если аффинная решетка, порожденная $P \cap \mathbb{Z}^2$, является суммой аффинных решеток, порожденных $P_i \cap \mathbb{Z}^2$. Такое разложение называется *допустимым решеточным разложением Минковского* и обозначается через $P = P_1 + \dots + P_k$.

Целочисленный трехмерный многогранник имеет тип Минковского, если он рефлексивен, и все его грани имеют тип Минковского.

Определение 4.3 (см. [CCGK16]). Пусть $P \in \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{R}$ — целочисленный многоугольник типа A_n . Пусть v_0, \dots, v_n — последовательные целые точки на той стороне многоугольника P , которая имеет целую длину n , и пусть u — оставшаяся целая точка многоугольника P . Пусть $x = (x_1, x_2)$ — мультипеременная, соответствующая целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Положим

$$f_P = x^u + \sum \binom{n}{k} x^{v_k}.$$

(В частности, $f_P = x^u + x^{v_0}$ для $n = 0$.)

Пусть $Q = Q_1 + \dots + Q_s$ — допустимое решеточное разложение Минковского целого многоугольника $Q \subset \mathbb{R}^2$. Положим

$$f_{Q_1, \dots, Q_s} = f_{Q_1} \cdot \dots \cdot f_{Q_s}.$$

Многочлен Лорана $f \in \mathbb{T}[x_1, x_2, x_3]$ называется многочленом *типа Минковского*, если многогранник $N(f)$ имеет тип Минковского, и для каждой грани $Q \subset N(f)$, как для целого многоугольника, существует допустимое решеточное разложение Минковского $Q = Q_1 + \dots + Q_s$, такое что $f|_Q = f_{Q_1, \dots, Q_s}$.

Все 98 семейств гладких многообразий Фано, имеющие очень обильный антиканонический класс, имеют слабые модели Ландау–Гинзбурга типа Минковского, см. [CCGK16].

Замечание 4.4. Существует понятие *максимально мутационного многочлена* (см, к примеру, [КТ]). Оно заключается в следующем. Бирациональный изоморфизм $\phi: \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{T}[y_1, \dots, y_n]$ называется элементарной мутацией многочленов f и g , если он задается как $y_1 \phi(x_1, \dots, x_n)$, $y_i = x_i$ для $2 \leq i \leq n$, и $\phi^*(f) = g$. Многочлены Лорана f и g от n переменных называются мутационно эквивалентными, если существует последовательность элементарных мутаций, переводящая один многочлен в другой. С другой стороны, имея многогранник Δ и вектор в двойственном пространстве v , можно определить мутацию Δ в v (если она существует), умножая по Минковскому k -ю линию уровня v (то есть множества точек $\{p \in \Delta \mid \langle p, v \rangle = k\}$) на k -ю степень некоторого фиксированного многогранника Δ_v (и деля на него при $k < 0$). (Мутации многогранников соответствуют деформациям торических многообразий Фано, верными многогранниками которых они являются, см. [IV12]). Ясно, что мутации многочленов Лорана индуцируют мутации их многогранников Ньютона. Однако обратное утверждение в общем случае неверно; оно задает сильные условия на коэффициенты многочлена Лорана. Многочлен Лорана называется *максимально мутационным*, если любая мутация его многогранника Ньютона продолжается до мутации многочлена, и это же верно для всех его мутаций. Жесткие (то есть не имеющие параметров) максимально мутационные многочлены Лорана и образуют класс слабых моделей Ландау–Гинзбурга, который кажется на данный момент наилучшим

образом отвечающим многообразиям Фано. Так, в размерности 2 существует ровно 10 таких классов, и элементы каждого класса являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга для всех 10 семейств поверхностей дель Пеццо; в размерности 3 существует 105 классов многочленов, и каждый класс соответствует одному из 105 семейств трехмерных многообразий Фано (частное сообщение от А. Каспрчика).

Замечание 4.5. Разложение по Минковскому граней многогранников Ньютона многочленов Лорана типа Минковского естественным образом определяют мутацию этих многочленов. Оказывается (см. [CCGK16]), многочлены типа Минковского мутационно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же последовательность свободных членов (и тем самым, являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга одного и того же многообразия Фано, если им соответствует такое многообразие). Классы многочленов Лорана типа Минковского, не являющиеся слабыми моделями Ландау–Гинзбурга гладких многообразий Фано, гипотетически соответствуют гладким орбифолдам.

4.2. КОМПАКТИФИКАЦИИ КАЛАБИ–ЯУ

Пусть f — слабая модель Ландау–Гинзбурга для гладкого трехмерного многообразия Фано X и дивизора D на нем. Напомним обозначения параграфа 1.2. Пусть $\Delta = N(f)$, $\nabla = \Delta^\vee$, $T = T_\Delta$, $T^\vee = T_\nabla$. Во многих случаях многочлены, удовлетворяющие условию периодов и торическому условию, также удовлетворяют и условию Калаби–Яу. Однако его не так просто проверить: в отличие от случая первых двух условий, не существует достаточно общих подходов к третьему; обычно приходится проверять условие Калаби–Яу “вручную”. Естественной представляется идея компактифицировать слои отображения $f: (\mathbb{C}^*)^3 \rightarrow \mathbb{C}$, используя вложение $(\mathbb{C}^*)^3 \hookrightarrow T^\vee$. Действительно, слои компактифицируются до антиканонических сечений в T^\vee и, таким

образом, имеют тривиальные антиканонические классы. Однако во-первых многообразие T^V обычно особо и, даже если мы разрешим его (если у него есть крепантное разрешение!), мы лишь сможем заключить, что его общее антиканоническое сечение является гладким многообразием Калаби–Яу, но сложно сказать что-то о конкретных нужных нам сечениях. Во-вторых, интересующее нас семейство антиканонических сечений имеет базисное множество, которое нам надо раздуть для того, чтобы построить компактификацию Калаби–Яу; и это раздутие может быть не крепантным.

Коэффициенты многочленов, соответствующих трехмерным многообразиям Фано, имеют тенденцию к тому, чтобы иметь очень симметричные коэффициенты, по крайней мере для простейших многогранников Ньютона. В этом случае базисные множества более просты и позволяют построить компактификации Калаби–Яу. Мы будем предполагать, что многочлен f имеет тип Минковского. В частности, ∇ целочисленный, другими словами, Δ рефлексивен, и целыми точками обоих многогранников Δ и ∇ являются либо точки на границе, либо центры координат.

Лемма 4.6. *Пусть T — трехмерное рефлексивное торическое многообразие. Тогда многообразие \tilde{T}^V гладко.*

Доказательство. Пусть C — двумерный конус веера многообразия \tilde{T}^V . Он является конусом над треугольником R с целыми вершинами, не имеющим целых строго внутренних точек и лежащим в аффинной плоскости $L = \{x \mid \langle x, y \rangle \geq -1\}$ для некоторого вектора $y \in N$. Это значит, что в некотором базисе e_1, e_2, e_3 в M выполнено $L = \{a_1 e_1 + a_2 e_2 + e_3\}$. Пусть P — пирамида над R с вершиной в центре координат. Тогда по формуле Пика $\text{vol } R = \frac{1}{2}$ и $\text{vol } P = \frac{1}{6}$, что значит, что вершины треугольника R формируют базис в M , так что \tilde{T}^V гладко. \square

К сожалению, утверждение леммы 4.6 не всегда выполнено в случае высших размерностей, так как существуют n -мерные симплексы, единственными целыми точками которых являются вершины, такие что их объемы больше, чем $\frac{1}{n!}$.

Лемма 4.7. Пусть f — многочлен Лорана типа Минковского. Тогда для любой грани Q многогранника Δ кривая $R_{Q,f}$ является объединением (трансверсально пересекающихся) гладких рациональных кривых (возможно, с кратностями).

Доказательство. Пусть грань Q имеет тип A_k , $k > 0$. В подходящем базисе грань Q имеет вершины $u = (0, 1)$, $v_0 = (0, 0)$, $v_k = (k, 0)$ и целые точки $v_i = (i, 0)$. Пусть x, x_0, \dots, x_k — координаты, соответствующие u, v_0, \dots, v_k . Тогда, согласно факту 1.9, F_Q задается соотношениями $x_i x_j = x_r x_s$, $i + j = r + s$, в $\mathbb{P}[x : x_0 : \dots : x_k]$. Это значит, что $F_Q = v_k(\mathbb{P}(1, 1, k))$ является образом k -го отображения Веронезе поверхности $\mathbb{P}(1, 1, k)$. Пусть y_0, y_1, y_2 — координаты на $\mathbb{P}(1, 1, k)$, где вес переменной y_2 равен k . Имеем

$$R_{Q,f} = \left\{ \sum x_i \binom{n}{i} + x = 0 \right\} \cap F_Q \subset \mathbb{P}^Q.$$

Отсюда

$$R_{Q,f} = \{(y_0 + y_1)^k + y_2 = 0\} \subset \mathbb{P}(1, 1, k),$$

так что кривая $R_{Q,f}$ проектируется изоморфно на \mathbb{P}^1 при проекции поверхности $\mathbb{P}(1, 1, k)$ на \mathbb{P}^1 вдоль третьей координаты. Таким образом, $R_{Q,f}$ является гладкой рациональной кривой кратности один.

Пусть теперь $Q = Q_1 + \dots + Q_n$ — допустимое решеточное разложение Минковского, в котором Q_i имеют тип A_{k_i} , такое что $f|_Q = f_{Q_1} \dots f_{Q_n}$. Тогда, как и выше, существуют вложения Веронезе $v_{k_i}: \mathbb{P}(1, 1, k_i) \rightarrow \mathbb{P}^{k_i+1}$, в которых \mathbb{P}^{k_i+1} — различные проективные пространства. Пусть Π — произведение этих проективных пространств по всем Q_i , так что координаты на Π могут быть

описаны как наборы целых точек на (Q_1, \dots, Q_n) . Обозначим отображение $F_{Q_1} \times \dots \times F_{Q_n} \rightarrow \Pi$ через φ . Пусть $\psi: \Pi \rightarrow \mathbb{P}_S$ — вложение Сегре. Пусть \mathbb{P} — проективное пространство, координаты в котором соответствуют целым точкам многоугольника Q . Пусть x_{b_1, \dots, b_n} — естественные координаты на \mathbb{P}_S . Пространство \mathbb{P} может быть описано как линейное сечение пространства \mathbb{P}_S , определяемое линейным пространством

$$L = \{x_{b_1, \dots, b_n} = x_{b'_1, \dots, b'_n} \mid b_1 + \dots + b_n = b'_1 + \dots + b'_n\},$$

и $F_Q = \psi\varphi(F_{Q_1} \times \dots \times F_{Q_n}) \cap L$ в \mathbb{P}_S . Это дает бирациональные изоморфизмы $F_{Q_i} \rightarrow F_Q$ для $k_i > 0$ и \mathbb{P}^1 -расслоения для $k_i = 0$. (Другими словами, координаты на F_{Q_i} соответствуют точкам типа $a + b_1 + \dots + b_{n-1}$ на F_Q , где $a \in Q_i$ и b_j — некоторые фиксированные точки на Q_j , $j \neq i$.) В этих координатах функция $f|_Q$ раскладывается на n функций f_{Q_1}, \dots, f_{Q_n} , таких что $f_{Q_i} = f_{Q_j}$ для $Q_i = Q_j$. Это дает требуемое разложение $R_{Q,f} = B_1 \cup \dots \cup B_n$, где B_i изоморфно R_{Q_i, f_i} для $k_i > 0$ и описанного выше стандартного линейного сечения f_i на $\mathbb{P}(1, 1, a_i)$, B_j — прямая (слой) для $k_j = 0$ и $B_r = B_s$ для $Q_r = Q_s$. \square

Предложение 4.8. *Рассмотрим гладкое трехмерное многообразие W . Пусть F — однопараметрическая антиканоническая линейная система на W с приведенным слоем $D = F_\infty$. Пусть базисное множество $B \subset D$ является объединением гладких кривых (возможно, с кратностями), такое что для каждой двух компонент D_1, D_2 дивизора D выполнено $D_1 \cap D_2 \not\subset B$. Тогда существует разрешение базисного множества $f: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ с гладким тотальным пространством Z , такое что $-K_Z = f^{-1}(\infty)$.*

Доказательство (ср. компактификационную конструкцию 3.6). Обозначим через $\pi: W' \rightarrow W$ раздутие одной компоненты C множества B на W . Так как π является раздутием гладкой кривой на гладком многообразии, W' гладко. Пусть E — исключительный дивизор этого раздутия. Пусть $D' = \cup D'_i$ — собственный прообраз дивизора $D = \cup D_i$. Так как кратность дивизора C на

D равна 1, имеем

$$-K_{W'} = \pi^*(-K_W) - E = D' + E - E = D'.$$

Более того, базисное множество семейства на W' такое же, как B или $B \setminus C$, возможно вместе с гладкой кривой C' , изоморфной $E \cap D'_i$; в частности, C изоморфно прямой \mathbb{P}^1 . (В базисном множестве нет изолированных точек, так как оно является пересечением двух дивизоров на гладком многообразии.) Таким образом, все условия предложения выполнены и для W' . Так как (W, F) является канонической парой, базисное множество B может быть разрешено за конечное число шагов. Это дает требуемое разрешение. \square

Теорема 4.9. *Любой многочлен Лорана от трех переменных типа Минковского допускает компактификацию лог-Калаби-Яу.*

Доказательство. Пусть f — такой многочлен Лорана. Напомним, что многогранник Ньютона Δ многочлена f рефлексивен, и (особое) торическое многообразие (Фано), веерным многогранником которого является $\nabla = \Delta^\vee$, обозначается через T^\vee . Семейством слоев отображения, задающегося многочленом f , является пучок $\{f = \lambda, \lambda \in \mathbb{C}\}$. Слои этого пучка имеют естественные компактификации до антиканонических сечений в T^\vee . Это семейство (точнее, его компактификация до семейства $\{\lambda_0 f = \lambda_1\}$ над $\mathbb{P}[\lambda_0 : \lambda_1]$) порождено своим общим членом и членом, соответствующим постоянному многочлену Лорана. Последний является не чем иным, как граничным дивизором D многообразия T^\vee . Обозначим полученный пучок на T^\vee через $f: Z_{T^\vee} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ (для простоты мы используем одно и то же обозначение f для многочлена Лорана, соответствующего семейства, и разрешений этого семейства). По лемме 4.7, базисным множеством пучка f на Z_{T^\vee} является объединение гладких (рациональных) кривых (возможно, с кратностями). По лемме 4.6, многообразие \tilde{T}^\vee является крепантным разрешением многообразия T^\vee . По определению многогранника Ньютона коэффициенты многочлена Лорана типа Минковского в

вершинах многогранника Δ ненулевые. Это значит, что базисное множество не содержит тор-инвариантных стратов многообразия T^V , так как оно не содержит тор-инвариантных точек по факту 1.12. Таким образом, мы получаем пучок $f: Z_{\tilde{T}^V} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, тотальное пространство которого гладко, а базисное множество опять является объединением (трансверсально пересекающихся) гладких кривых (возможно, с кратностями). По предложению 4.8, существует разрешение $f: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ базисного множества на $Z_{\tilde{T}^V}$, такое что Z является гладким и $-K_Z = f^{-1}(\infty)$. Таким образом, Z и есть требуемая компактификация лог-Калаби–Яу, и $Y = Z \setminus f^{-1}(\infty)$ является компактификацией Калаби–Яу. \square

Замечание 4.10. Конструкция компактификации Калаби–Яу не канонична: она зависит от последовательности раздутий базисных компонент. Однако все компактификации лог-Калаби–Яу изоморфны в коразмерности один.

Предложение 4.11 (ср. предложение 4.1). *Многообразия Фано X_{1-1} , X_{1-11} , X_{2-1} , X_{2-2} , X_{2-3} , X_{9-1} и X_{10-1} имеют торические модели Ландау–Гинзбурга.*

Доказательство. Согласно предложению 4.1, эти многообразия имеют слабые модели Ландау–Гинзбурга. По [ИККПС] и [ДНКЛР], они удовлетворяют торическому условию. Компактифицируем семейство, задающееся многочленом f_{i-j} , до семейства (особых) антиканонических сечений в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ или \mathbb{P}^3 , а затем крепантно разрешим особенности тотального пространства семейства. Рассмотрим эти случаи по одному.

Слабой моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия X_{2-1} является многочлен

$$f_{2-1} = \frac{(x+y+1)^6(z+1)}{xy^2} + \frac{1}{z},$$

то есть функция на торе $\text{Spec } \mathbb{T}[x, y, z]$.

Рассмотрим семейство $\{f_{2-1} = \lambda, \lambda \in \mathbb{C}\}$. Сделаем бирациональную замену переменных

$$x = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_1^2 b_2} - 1, \quad y = \frac{1}{b_1^2 b_2}, \quad z = \frac{1}{a_1} - 1$$

и умножим полученное выражение на знаменатель. Мы видим, что это семейство бирационально семейству

$$\{(1 - a_1)b_2^3 = ((1 - a_1)\lambda - a_1) a_1(b_1 b_2 - b_1^2 b_2 - 1)\} \subset \mathbb{A}[a_1, b_1, b_2] \times \mathbb{A}[\lambda].$$

Теперь оно может быть компактифицировано до семейства гиперповерхностей типа $(2, 3)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ с помощью вложения

$$\mathbb{T}[a_1, b_1, b_2] \hookrightarrow \mathbb{P}[a_0 : a_1] \times \mathbb{P}[b_0 : b_1 : b_2].$$

(Некомпактное) тотальное пространство этого семейства имеет тривиальный канонический класс, а его особенности являются объединением рациональных кривых, которые в общих точках являются дювалевскими вдоль прямых. Раздуем любую из этих кривых. Мы снова получим особенности такого же типа, и (возможно) обыкновенные двойные точки. После нескольких крепантных раздутий мы получим трехмерное многообразие лишь с обыкновенными двойными точками; эти точки имеют алгебраическое малое разрешение. Это разрешение и завершает конструкцию компактификации Калаби–Яу. Заметим, что тотальное пространство $(\mathbb{C}^*)^3$ исходного семейства вложено в это разрешение.

Похожим образом получаются компактификации Калаби–Яу и для остальных многообразий. Имеем

$$f_{1-1} = \frac{(x + y + z + 1)^6}{xyz}.$$

Замена переменных

$$x = ab, \quad y = a, \quad z = a - ab - ac - 1,$$

примененная к семейству $\{f_{1-1} = \lambda\}$, и умножение на знаменатель дают семейство кватрик

$$a^4 = \lambda bc(a - ab - ac - 1).$$

Вложение $\text{Spec } \mathbb{T}[a, b, c] \hookrightarrow \mathbb{P}[a : b : c : d]$ дает компактификацию до семейства кватрик над \mathbb{A}^1 .

Имеем

$$f_{1-11} = \frac{(x + y + 1)^6}{xy^2z} + z.$$

Замена переменных

$$x = a - ab - \frac{c}{b} - 1, \quad y = ab, \quad z = \frac{c}{b},$$

примененная к семейству $\{f_{1-11} = \lambda\}$, и умножение на знаменатель дают семейство кватрик

$$a^4 = (\lambda b - c)(a - ab - 1)c.$$

Вложение $\text{Spec } \mathbb{T}[a, b, c] \hookrightarrow \mathbb{P}[a : b : c : d]$ дает компактификацию до семейства кватрик над \mathbb{A}^1 .

Имеем

$$f_{2-2} = \frac{(x + y + z + 1)^2}{x} + \frac{(x + y + z + 1)^4}{yz}.$$

Замена переменных

$$x = ab, \quad y = bc, \quad z = c - ab - bc - 1,$$

примененная к семейству $\{f_{2-2} = \lambda\}$, и умножение на знаменатель дают семейство кватрик

$$ac^3 = (c - ab - bc - 1)(\lambda ab - c^2).$$

Вложение $\text{Spec } \mathbb{T}[a, b, c] \hookrightarrow \mathbb{P}[a : b : c : d]$ дает компактификацию до семейства кватрик над \mathbb{A}^1 .

Имеем

$$f_{2-3} = \frac{(x + y + 1)^4(z + 1)}{xyz} + z + 1.$$

Замена переменных

$$x = ac, \quad y = a - ac - 1, \quad z = \frac{b}{c} - 1,$$

примененная к семейству $\{f_{2-3} = \lambda\}$, и умножение на знаменатель дает семейство

$$a^3b = (\lambda c - b)(b - c)(a - ac - 1).$$

Вложение $\text{Spec } \mathbb{T}[a, b, c] \hookrightarrow \mathbb{P}[a : b : c : d]$ дает компактификацию до семейства квартик над \mathbb{A}^1 .

Имеем

$$f_{9-1} = x + \frac{1}{x} + \frac{(y + z + 1)^4}{yz}.$$

Замена переменных

$$x = \frac{c}{b}, \quad y = ac, \quad z = a - ac - 1,$$

примененная к семейству $\{f_{9-1} = \lambda\}$, и умножение на знаменатель дает семейство

$$a^3b = (\lambda bc - b^2 - c^2)(a - ac - 1).$$

Вложение $\text{Spec } \mathbb{T}[a, b, c] \hookrightarrow \mathbb{P}[a : b : c : d]$ дает компактификацию до семейства квартик над \mathbb{A}^1 .

Имеем

$$f_{10-1} = \frac{(x + y + 1)^6}{xy^2} + z + \frac{1}{z}.$$

Замена переменных

$$x = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_1^2 b_2} - 1, \quad y = \frac{1}{b_1^2 b_2}, \quad z = a_1,$$

примененная к семейству $\{f_{10-1} = \lambda\}$, и умножение на знаменатель дает семейство

$$a_1 b_2^3 = (\lambda a_1 - a_1^2 - 1)(b_1 b_2 - b_1^2 b_2 - 1).$$

Вложение $\text{Spec } \mathbb{T}[a_1, b_1, b_2] \hookrightarrow \mathbb{P}[a_0 : a_1] \times \mathbb{P}[b_0 : b_1 : b_2]$ дает компактификацию до семейства особых гиперповерхностей бистепени $(2, 3)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ над \mathbb{A}^1 .

Во всех случаях тотальные пространства этих семейств имеют крепантные разрешения. \square

В некоторых случаях компактификация Калаби–Яу может быть построена другим способом, используя технику мультипотенциалов и эллиптических расслоений.

Предложение 4.12 (А. Хардер). *Многочлен f_{10-1} удовлетворяет условию Калаби–Яу.*

Доказательство. Рассмотрим поверхность $B = \mathbb{A}[w] \times \mathbb{P}[s_0 : s_1]$. Компактифицируем семейство, задающееся многочленом f_{10-1} , до семейства эллиптических кривых над B , так что проекция на \mathbb{A}^1 дает (частичную компактификацию) исходного семейства. Это расслоение Вейерштрасса может быть задано уравнением

$$Y^2 = X^3 + f_2 X + f_3$$

с

$$f_2 = -\frac{1}{3} (2w^2 s_1^2 - 3w s_0 s_1 + s_0^2 + s_1^2)^4,$$

$$f_3 = \frac{2}{27} (2w^2 s_1^2 - 3w s_0 s_1 - 864w s_1^2 + s_0^2 + 864s_0 s_1 + s_1^2) \cdot (2w^2 s_1^2 - 3w s_0 s_1 + s_0^2 + s_1^2)^5.$$

Это расслоение особое, и его множество вырождения над B задается уравнением

$$s_1 (w s_1 - s_0) (2w^2 s_1^2 - 3w s_0 s_1 - 432w s_1^2 + s_0^2 + 432s_0 s_1 + s_1^2) \cdot (2w^2 s_1^2 - 3w s_0 s_1 + s_0^2 + s_1^2)^{10} = 0.$$

Каждая компонента этого особого множества является гладкой кривой над B . Особенности тотального пространства этого расслоения лежат в слоях над кривой, задающейся уравнением

$$2w^2 s_1^2 - 3w s_0 s_1 + s_0^2 + s_1^2 = 0.$$

Над этой кривой получим кривую дювалевских особенностей типа E_8 . Эти особенности могут быть разрешены с помощью восьми раздутий. Это дает гладкое многообразие Y , которое расслоено над \mathbb{A}^1 и относительно компактно. Чтобы увидеть, что это разрешение действительно является многообразием Калаби–Яу, можно использовать формулу для канонического расслоения ([Mi83, стр. 132]). Формула является уравнением $K_Y = g^*(K_B + L)$, где g — отображение $Y \rightarrow B$, а L является дивизором на базе расслоения, который, в этом случае, является подъемом с \mathbb{P}^1 на B сечения пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$. Таким образом, K_Y является подъемом тривиального расслоения на B , а, значит, и сам тривиален. Таким образом, Y является компактификацией Калаби–Яу для семейства, задающегося многочленом f_{10-1} . \square

В [DHKLP] и [IKKPS] показано, что все трехмерные многообразия Фано с очень обильным антиканоническим классом имеют слабые модели Ландау–Гинзбурга типа Минковского, для которых выполнено торическое условие. Таким образом, суммируя теорему 4.9, предложение 4.1, предложение 4.11 и [DHKLP] и [IKKPS], получаем следующее утверждение.

Следствие 4.13. *Пара, состоящая из гладкого трехмерного многообразия Фано X и тривиального дивизора на нем, имеет торическую модель Ландау–Гинзбурга. Более того, если $-K_X$ очень обилён, то многочлен Лорана типа Минковского, удовлетворяющий условию периодов для $(X, 0)$, является торической моделью Ландау–Гинзбурга.*

Замечание 4.14. Напомним, что \tilde{T} является гладким торическим многообразием с $F(\tilde{T}) = \Delta$. Пусть f — общий многочлен Лорана с $N(f) = \Delta$. Многочлен Лорана f является торической моделью Ландау–Гинзбурга для пары (\tilde{T}, D) , где D является общим \mathbb{C} -дивизором на \tilde{T} . Действительно, условие периодов для него выполнено по [Gi97b]. Следуя компакфикационной процедуре, описанной в доказательстве теоремы 4.9, можно видеть, что базисное

множество B является объединением гладких трансверсально пересекающихся кривых (не обязательно рациональных). Это значит, что так же, как и выше, утверждение теоремы 4.9 выполнено для f , так что f удовлетворяет условию Калаби–Яу (ср. [Ha16]). Наконец, торическое условие выполнено для f тавтологически. Таким образом, f является торической моделью Ландау–Гинзбурга для (\tilde{T}, D) .

Проблема 4.15. *Доказать это для гладких трехмерных многообразий Фано и любых дивизоров. Описание многочленов Лорана для всех трехмерных многообразий Фано содержится в [DNKLP].*

Вопрос 4.16. *Верно ли, что условие Калаби–Яу следует из условия периодов и торического условия? Если нет, какие условия необходимо наложить на многочлен Лорана, чтобы оно следовало?*

Другим преимуществом компактификационной процедуры, описанной в теореме 4.9, является то, что она позволяет описать “слои компактифицированных моделей Ландау–Гинзбурга над бесконечностью”. Эти слои играют важную роль, скажем, для вычисления чисел Ходжа моделей Ландау–Гинзбурга, см. параграф 3.1. Мы подытожим эти наблюдения в следующем утверждении.

Следствие 4.17 (ср. [Ha16, Conjecture 2.3.13]). *Пусть f — многочлен Лорана типа Минковского. Пусть \tilde{T}^\vee — (гладкое) максимально триангулированное торическое многообразие, такое что $F(\tilde{T}^\vee) = N(f)$, и пусть D — граничный дивизор для \tilde{T}^\vee . Существует компактификация лог-Калаби–Яу $f: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ с $-K_Z = f^{-1}(\infty) = D$. В частности, D состоит из $\frac{(-K_{T_N(f)})^3}{2} + 2$ компонент, комбинаторно заданных триангуляцией сферы. (Это значит, что вершины триангуляции соответствуют компонентам дивизора D , ребра соответствуют пересечениям компонент, а треугольники — точкам тройных пересечений компонент.)*

Доказательство. Пусть v равно числу вершин в триангуляции многогранника ∇ ; другими словами, v равно числу целых точек границы многогранника ∇ , или, что то же самое, числу компонент дивизора D . Пусть e равно числу ребер в триангуляции, и пусть f равно числу треугольников. Так как триангуляция является триангуляцией сферы, имеем $v - e + f = 2$. С другой стороны, $2e = 3f$. Это значит, что $v = \frac{f}{2} + 2$. Необходимое утверждение теперь следует из того, что оба числа $(-K_{T_N(f)})^3$ и f равны нормализованному объему многогранника ∇ . \square

Замечание 4.18. Пусть $g = \frac{(-K_X)^3}{2} + 1$ — род трехмерного многообразия Фано X ; в частности, D состоит из $g + 1$ компонент. Тогда $g + 1 = \dim | -K_X |$.

Замечание 4.19. Описание слоев моделей Ландау–Гинзбурга над бесконечностью хорошо укладывается в картину зеркальной симметрии с точки зрения части 8. Описанные там проекции с точки зрения дивизоров на бесконечности задаются элементарными подтриангуляциями сферы граничных дивизоров.

Общие слои компактифицированных торических моделей Ландау–Гинзбурга являются гладкими поверхностями типа КЗ. Однако некоторые из них могут быть особыми или даже приводимыми. Наши наблюдения почти не дают о них никакой информации; однако особые слои моделей Ландау–Гинзбурга представляют особый интерес — они содержат информацию о производной категории особенностей. Примеров вычисления таких категорий немного. Более вычисляемым инвариантом является число компонент приводимых слоев, см. часть 7.

Замечание 4.20. Большинство трехмерных многообразий Фано имеет “простые” торические вырождения, скажем, вырождения к торическим многообразиям с особенностями типа sDV (комбинаторно это значит, что целые точки их веерных многогранников, кроме центра координат, лежат только на ребрах). В этих частных случаях можно проследить за исключительными

дивизорами, возникающими при процедуре разрешения, описанной в предложении 4.8 и теореме 4.9. А именно, можно вычислить кратности базисных кривых (каждая кратность, большая 1, дает исключительные дивизоры в слоях) и локальное поведение их пересечений. Тогда, в духе процедуры разрешения 7.17, можно вычислить требуемое число компонент.

4.3. ТОРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛАНДАУ–ГИНЗБУРГА

Как мы упоминали, в работах [DNKLP] и [IKKPS] доказано торическое условие для большого числа слабых моделей Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано (в том числе нужных нам). Методы, использованные в них — методы торических вырождений и анализ касательных пространств к пространствам деформаций в интересующих нас точках этих пространств. В этом параграфе мы подробно изучим интересующие нас торические вырождения трехмерных многообразий Фано основной серии.

Для этого приведем примеры торических моделей Ландау–Гинзбурга (типа Минковского) и докажем для них торическое условие.

Мног.	Инд.	Степ.	Описание	Торическая модель ЛГ
X_{1-1}	1	2	Гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$.	$\frac{(x+y+z+1)^6}{xyz}$
X_{1-2}	1	4	Общий элемент — кватрика.	$\frac{(x+y+z+1)^4}{xyz}$
X_{1-3}	1	6	Полное пересечение квадрики и кубики.	$\frac{(x+1)^2(y+z+1)^3}{xyz}$
X_{1-4}	1	8	Полное пересечение трех квадратик.	$\frac{(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2}{xyz}$

Мног.	Инд.	Степ.	Описание	Торическая модель ЛГ
X_{1-5}	1	10	Общий элемент — сечение грассманиана $\text{Gr}(2, 5)$ двумя гиперплоскостями и квадрикой.	$\frac{(1+x+y+z+xy+xz+yz)^2}{xyz}$
X_{1-6}	1	12	Линейное сечение ортогонального грассманиана $OG(5, 10)$ коразмерности 7.	$\frac{(x+z+1)(x+y+z+1)(z+1)(y+z)}{xyz}$
X_{1-7}	1	14	Линейное сечение грассманиана $\text{Gr}(2, 6)$ коразмерности 5.	$\frac{(x+y+z+1)^2}{x} + \frac{(x+y+z+1)(y+z+1)(z+1)^2}{xyz}$
X_{1-8}	1	16	Линейное сечение симплектического грассманиана $SGr(3, 6)$ коразмерности 3.	$\frac{(x+y+z+1)(x+1)(y+1)(z+1)}{xyz}$
X_{1-9}	1	18	Линейное сечение грассманиана группы G_2 коразмерности 2.	$\frac{(x+y+z)(x+xz+xy+xyz+z+y+yz)}{xyz}$
X_{1-10}	1	22	Сечение расслоения $\Lambda^2\mathcal{U}^* \oplus \Lambda^2\mathcal{U}^* \oplus \Lambda^2\mathcal{U}^*$ на грассманиане $\text{Gr}(3, 7)$, где \mathcal{U} — тавтологическое расслоение.	$\frac{(z+1)(x+y+1)(xy+z)}{xyz} + \frac{xy}{z} + z + 3$
X_{1-11}	2	$8 \cdot 1$	Гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$.	$\frac{(x+y+1)^6}{xy^2z} + z$
X_{1-12}	2	$8 \cdot 2$	Гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$.	$\frac{(x+y+1)^4}{xyz} + z$

Мног.	Инд.	Степ.	Описание	Торическая модель ЛГ
X_{1-13}	2	$8 \cdot 3$	Кубика.	$\frac{(x+y+1)^3}{xyz} + z$
X_{1-14}	2	$8 \cdot 4$	Пересечение двух квадрик.	$\frac{(x+1)^2(y+1)^2}{xyz} + z$
X_{1-15}	2	$8 \cdot 5$	Линейное сечение грассманиана $\text{Gr}(2, 5)$ корузмерности 3.	$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$
X_{1-16}	3	$27 \cdot 2$	Квадрика.	$\frac{(x+1)^2}{xyz} + y + z$
X_{1-17}	4	64	\mathbb{P}^3 .	$x + y + z + \frac{1}{xyz}$

Таблица 1: Торические модели Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано основной серии

Рассмотрим проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$, определенное некоторым однородным идеалом $I \subset S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Если \prec — некоторый мономиальный порядок на S , тогда существует плоское семейство, вырождающее X к $X_{\prec} = V(\text{init}_{\prec}(I))$, где $\text{init}_{\prec}(I)$ — идеал главных членов элементов идеала I относительно мономиального порядка \prec . Эта конструкция может не давать сразу торическое вырождение многообразия X , так как, в общем случае, многообразие X_{\prec} будет очень особо и приводимо, поэтому не может быть торическим многообразием или вырождаться к торическому многообразию.

Вместо этого мы будем рассматривать торические многообразия, вложенные в \mathbb{P}^n , которые также вырождаются к X_{\prec} . Рассмотрим такое торическое многообразие Z , и обозначим через \mathcal{H} схему Гильберта подмногообразий пространства \mathbb{P}^n с таким же многочленом Гильберта, как у X . Если многообразие X соответствует достаточно общей точке компоненты пространства \mathcal{H} , а X_{\prec}

лежит только на этой компоненте, то многообразие X должно вырождаться к Z . Это геометрическое объяснение следующей теоремы; триангуляции, которые в ней возникают, соответствуют вырождениям торических многообразий к некоторым специальным мономиальным идеалам, деформации которых не имеют препятствий.

Теорема 4.21 ([CI14, Corollary 3.4]). *Рассмотрим трехмерный рефлексивный многогранник ∇ , содержащий t целых точек, $7 \leq t \leq 11$, допускающий регулярную унимодулярную триангуляцию, содержащую центр координат в каждом трехмерном симплексе, и такую что любая другая вершина триангуляции имеет валентность 5 или 6. Тогда гладкое трехмерное многообразие Фано индекса 1 и степени $2t - 6$ допускает вырождение к T_Δ , где $\Delta = \nabla^\vee$.*

Пример 4.22 (X_{1-6}). Рассмотрим многочлен Лорана f из таблицы 1, соответствующий трехмерному многообразию Фано X_{1-6} . Многогранник $\nabla = \Delta_f^\vee$, двойственный к многограннику Ньютона многочлена f , является выпуклой оболочкой векторов $\pm e_1, \pm e_2, e_3, -e_1 - e_2, e_2 + e_3$ и $-e_1 - e_2 - e_3$, см. рисунок 1. Многогранник ∇ имеет только одну несимплициальную грань, которая является параллелограммом. Разбиение этой грани любой из диагоналей дает триангуляцию границы $\partial\nabla$, которая естественным образом дает триангуляцию многогранника ∇ , такую, что центр координат содержится в каждом трехмерном симплексе. Несложно проверить, что эта триангуляция регулярна и унимодулярна; более того, все вершины в ней (кроме центра координат) имеют валентности 5 или 6. Таким образом, согласно теореме 4.21, многообразие X_{1-6} вырождается к T_{Δ_f} .

Пример 4.23 ($X_{1-4}, X_{1-5}, X_{1-7}$ и X_{1-8}). Рассмотрим многочлен Лорана f из таблицы 1 для многообразий $X_{1-i}, i \in \{4, 5, 7, 8\}$. Так же, как и в предыдущем примере при $i = 6$, можно “руками” проверить, что многогранник

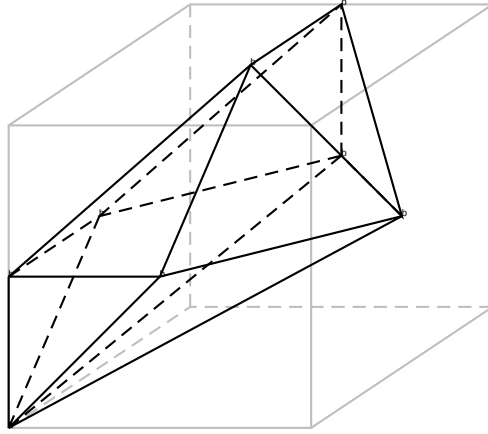


Рис. 1. Многогранник Δ_f^\vee для X_{1-6}

∇ , двойственный к многограннику Ньютона многочлена f , удовлетворяет условию теоремы 4.21. Таким образом, существует вырождение многообразия X_{1-i} к торическому многообразию T_Δ , соответствующему торической модели Ландау–Гинзбурга f .

Пример 4.24 (X_{1-9}). Рассмотрим многочлен Лорана f из таблицы 1, соответствующий многообразию X_{1-9} . Многогранник ∇ , двойственный многограннику Ньютона многочлена f , имеет 12 целых точек, поэтому теорема 4.21 неприменима. Однако похожая техника может быть использована для доказательства существования требуемого вырождения. Действительно, размерность компоненты U , соответствующей многообразию X_{1-9} в схеме Гильберта $\mathcal{H}_{X_{1-9}}$ антиканонического вложения многообразия X_{1-9} , имеет размерность 153, см. [CI14, Proposition 4.1]. Многообразию T_Δ , где $\Delta = N(f)$, соответствует точка $[T_\Delta]$ в $\mathcal{H}_{X_{1-9}}$, так как его многочлен Гильберта равен многочлену Гильберта многообразия X_{1-9} . Стандартное вычисление из теории деформаций показывает, что $[T_\Delta]$ является гладкой точкой на компоненте размерности 153. Осталось показать, что этой компонентой является U .

Многогранник $\nabla = \Delta^\vee$ допускает регулярную унимодулярную триангуляцию, такую, что центр координат лежит в каждом трехмерном симплексе,

одна точка на границе имеет валентность 6, а все другие имеют валентности 4 или 5. Границей этой триангуляции является единственная триангуляция сферы с этими свойствами. В этом случае T_Δ вырождается к схеме Стенли–Райзнера R , соответствующей этой триангуляции, и к ней же вырождается многообразие X_{1-9} , см. [CI14, Corollary 3.3]. Более того, стандартное вычисление из теории деформаций показывает, что в точке $[R]$ схема Гильберта $\mathcal{H}_{X_{1-9}}$ имеет единственную компоненту размерности 153. Таким образом $[T_\Delta]$ должна лежать на U , а X_{1-9} должно вырождаться к T_Δ .

Таким образом, независимо от [DHLKP] и [IKKPS] мы доказали следующую теорему (ср. следствие 4.13).

Теорема 4.25. *Гладкие трехмерные многообразия Фано основной серии имеют торические модели Ландау–Гинзбурга.*

Доказательство. Согласно [CCGK16], многочлены Лорана, представленные в таблице 1, являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга соответствующих многообразий Фано, а согласно теореме 4.9, для них выполнено условие Калаби–Яу, так что достаточно проверить для этих многочленов торическое условие. Многообразия X_{1-i} , $i \in \{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14\}$, являются полными пересечениями во взвешенных проективных пространствах, и торическое условие для них следует из теоремы 5.25. Многообразия X_{1-10} и X_{1-15} имеют малые торические вырождения (то есть вырождения к терминальным горенштейновым торическим многообразиям), и торическое условие для них следует из [Gal08]. Торическое условие для многообразий X_{1-i} , $i \in \{5, 6, 7, 8\}$, следует из примера 4.22 и примера 4.23. Торическое условие для многообразия X_{1-9} следует из примера 4.24. Наконец, многообразие $X_{1-17} = \mathbb{P}^3$ само торическое. □

4.4. МОДУЛЯРНОСТЬ

Согласно гипотезе зеркальной симметрии? ожидается, что слоями модели Ландау–Гинзбурга многообразия Фано являются многообразия Калаби–Яу. Более точно, ожидается, что эти слои зеркально двойственны антиканоническим сечениям многообразия Фано. В трехмерном случае эта двойственность есть не что иное, как классическая двойственность КЗ поверхностей Долгачева–Никулина.

Пусть H — гиперболическая решетка, т. е. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с формой пересечения

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решеткой пересечений на вторых когомологиях любой КЗ поверхности является решетка $N = H \oplus H \oplus H \oplus E_8(-1) \oplus E_8(-1)$. Рассмотрим семейство U_K поверхностей типа КЗ, решетка алгебраических циклов которых содержит решетку $K \subset N$ (и совпадает с K для общей КЗ поверхности семейства). Рассмотрим решетку $L' = K^\perp$, ортогонал к K в N . Пусть $L' = H \oplus L$.

Определение 4.26 (см. [Do01]). Семейство КЗ поверхностей U_L называется *двойственным к U_K по Долгачеву–Никулину* семейством.

Рассмотрим главно поляризованное семейство антиканонических сечений трехмерного многообразия Фано X индекса i и степени $(-K_X)^3 = i^3 k$. Это семейство — не что иное, как $U_{\langle 2n \rangle}$, $2n = ik$, где через $\langle r \rangle$ мы будем обозначать решетку ранга 1, порожденную вектором с квадратом r . Решетка $U_{\langle 2n \rangle}$ является подрешеткой в H . Отображая таким образом $U_{\langle 2n \rangle}$ в одно из слагаемых H решетки N можно видеть, что двойственной к $U_{\langle 2n \rangle}$ по Долгачеву–Никулину решеткой является решетка

$$M_n = H \oplus E_8(-1) \oplus E_8(-1) + \langle -2n \rangle.$$

Поверхности с решеткой Пикара M_n являются *поверхностями Шiodы–Инозе*. Они могут быть описаны как разрешения факторов некоторых КЗ

поверхностей S по *инволюции Никулина*, то есть инволюции, сохраняющей решетку трансцендентных циклов T_S ; она меняет местами две копии $E_8(-1)$. Кроме того, поверхности Шиоды–Инозе могут быть описаны как куммеровы поверхности, соответствующие произведениям эллиптических кривых и n -изогенных им. M_n -поляризованные поверхности Шиоды–Инозе образуют неприводимое одномерное семейство.

Оказывается, что слои торических моделей Ландау–Гинзбурга из таблицы 1 можно компактифицировать до поверхностей Шиоды–Инозе, двойственных к антиканоническим сечениям трехмерных многообразий Фано. В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

Теорема 4.27. *Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано основной серии индекса i и пусть $(-K_X)^3 = i^3 k$. Тогда общие слои компактификации Калаби–Яу торической модели Ландау–Гинзбурга из таблицы 1 для многообразия X являются поверхностями Шиоды–Инозе с решетками Пикара $M_{ik/2}$.*

Мы будем говорить, что для торической модели Ландау–Гинзбурга для многообразия X выполнено условие Долгачева–Никулина, если для нее выполнено утверждение теоремы 4.27. Назовем такую торическую модель Ландау–Гинзбурга *хорошей*.

Таким образом, компактификации хороших моделей Ландау–Гинзбурга по модулю накрытий и стандартного действия группы $PSL(2, \mathbb{C})$ на базе образуют единственные семейства поверхностей Шиоды–Инозе. Более точно, они являются индексолистными накрытиями пространства модулей.

Следствие 4.28. *Компактификация хорошей торической модели Ландау–Гинзбурга единственна с точностью до флопов.*

Таким образом, если для трехмерных многообразий Фано основной серии выполняется гипотеза гомологической зеркальной симметрии, то модели

Ландау–Гинзбурга для этой гипотезы с точностью до флопов являются компактификациями торических моделей Ландау–Гинзбурга из таблицы 1. Более того, все другие хорошие модели Ландау–Гинзбурга бирациональны над базой \mathbb{A}^1 торическим моделям Ландау–Гинзбурга из таблицы 1.

Для доказательства теоремы 4.27 мы разберем все 17 случаев по-одному и вычислим решетки Нерона–Севери слоев компактифицированных моделей Ландау–Гинзбурга.

Замечание 4.29. В работе [Go07] Голышев описал модели Ландау–Гинзбурга, двойственные трехмерным многообразиям Фано основной серии, как универсальные семейства над модулярными кривыми $X_0(n)/\tau$ (где τ — инволюция Аткина–Ленера), слои которых являются куммеровыми поверхностями, связанными с произведениями эллиптических кривых и n -изогенных им. Описание Голышева периодов этих семейств в терминах модулярных форм с этой точки зрения является естественной. Вариации структур Ходжа наших поверхностей совпадают (над \mathbb{Q}) с вариациями для произведений эллиптических кривых, и такие же над \mathbb{Z} , как вариации куммеровых поверхностей; это следует из приведенного выше описания поверхностей Шиоды–Инозе. С этой точки зрения модулярность периодов моделей Ландау–Гинзбурга естественна.

Замечание 4.30. Ожидается, что слои моделей Ландау–Гинзбурга двойственны по Долгачеву–Никулину антиканоническим сечениям многообразий Фано любого ранга Пикара. Если увеличить ранг Пикара, слои моделей Ландау–Гинзбурга перестанут быть поверхностями Шиоды–Инозе. Однако они остаются поверхностями типа КЗ высокого ранга Пикара, поэтому у их периодов также есть модулярное (или автоморфное) описание. Скажем, для случая ранга Пикара 2 слои моделей Ландау–Гинзбурга являются куммеровыми поверхностями, связанными с произведением двух различных эллиптических кривых, а для случая ранга три — связанными с абелевыми поверхностями.

4.4.1. **Факты о решетках.** Для решетки L и поля k пространство $L \otimes_{\mathbb{Z}} k$ будем обозначать через L_k . Через \mathcal{N}, \mathcal{M} мы будем обозначать двойственные решетки ранга три. Через f_{1-i} мы будем обозначать торическую модель Ландау–Гинзбурга из таблицы 1, соответствующую многообразию Фано X_{1-i} , через $\Delta_{f_{1-i}} \subset \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ будем обозначать ее многогранник Ньютона, а через $\nabla_{f_{1-i}} \subset \mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ — двойственный многогранник.

Напомним, что через A_n, D_n, E_n мы обозначаем решетки корней соответствующих диаграмм Дынкина. Через M мы будем обозначать решетку $H \oplus E_8(-1) \oplus E_8(-1)$ ранга 18. Напомним, что через M_n мы обозначаем решетку $M \oplus \langle -2n \rangle$ ранга 19.

Мы будем использовать обозначение $(x : y : z : w)$ для однородных координат на \mathbb{P}^3 . Для различных непустых подмножеств $I, J, K \subset \{1, 2, 3, 4\}$ через H_I мы будем обозначать гиперплоскость, определяемую обращением в ноль суммы координат с номерами из I ; например, $H_{\{1\}}$ является координатной гиперплоскостью $x = 0$, тогда как $H_{\{2,4\}}$ обозначает гиперплоскость, определенную уравнением $y + w = 0$. Мы будем обозначать $L_{I,J} = H_I \cap H_J$ и $p_{I,J,K} = H_I \cap H_J \cap H_K$.

Часто мы будем пользоваться не компактификациями Калаби–Яу, построенными в параграфе 4.2, а компактификациями, задающиеся вложением $(\mathbb{C}^*)^3 \hookrightarrow \mathbb{P}[x : y : z : w]$. Это даст более явное описание слоев компактификаций как квартик в \mathbb{P}^3 с обыкновенными двойными точками. В этих случаях мы найдем некоторые кривые на минимальных разрешениях этих особых квартик (то есть слоев компактифицированных моделей Ландау–Гинзбурга), посчитаем матрицу их пересечений и удостоверимся, что она имеет ранг 19. Мы опустим детали конкретных вычислений этих матриц для удобства читателя. В других случаях мы будем использовать эллиптические пучки как описано ниже.

Напомним некоторые (иногда не такие известные) факты о решетках, которые нам понадобятся в дальнейшем. Большинство из них содержится в [Ni79]; хорошей ссылкой для чтения является [Be02]. Рассмотрим решетку L с билинейным спариванием $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Обозначим через L^* двойственную решетку $\text{Hom}(L, \mathbb{Z})$. Так как спаривание индуцирует изоморфизм $L_{\mathbb{Q}} \simeq \text{Hom}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$, можно считать, что $L^* \subset L_{\mathbb{Q}}$. Спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ индуцирует квадратичную форму q_L на дискриминантной группе $D(L) = L^*/L$ как $q_L(\phi) = \langle \phi, \phi \rangle$. *Априори* q_L принимает значения в \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , однако если решетка L четная, она принимает значения в $\mathbb{Q}/(2\mathbb{Z})$.

Зафиксировав базис e_1, \dots, e_r решетки L , можно построить *матрицу Грама* I_L , элементом с номером (i, j) которой является $\langle e_i, e_j \rangle$. Число $d(L) = \det(I_L)$ мы будем называть *детерминантом* решетки L .

Факт 4.31. Пусть L — четная решетка ранга r и сигнатуры $(s, r - s)$, и пусть d — минимальное число порождающих группы L^*/L . Если $r > d + 2$, то форма q_L и число s единственным образом определяют решетку L .

Факт 4.32. Пусть $L \subset M$ — четные решетки одного ранга. Тогда

$$[M : L]^2 = d(L)/d(M).$$

Факт 4.33. Пусть $L \subset M$ — четные решетки одного ранга, и пусть $G = M/L \subset L^*/L = D$. Заметим, что так как $L \subset M \subset M^* \subset L^*$, то выполнено $G \subset M^*/L \subset D$ и $(M^*/L)/G \simeq M^*/M$. Пусть теперь

$$G^{\perp} = \{a \in D \mid q_L(a + H) = q_L(a)\}.$$

Так как решетка M четна, то $q_L|_G = 0$, и, таким образом, $G \subset G^{\perp}$. Более того, по элементу $a \in D$ выберем элемент $\tilde{a} \in L^*$, такой что $a = \tilde{a} + L$. Тогда $a \in G^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $\langle \tilde{a}, M \rangle \subset \mathbb{Z}$, то есть $G^{\perp} = M^*/L$. Таким образом мы видим, что квадратичная форма q_M является ни чем иным, как формой $q_L|_{G^{\perp}}$, наследуемой с G^{\perp}/G .

Обратно, для подгруппы $G \subset D$, такой что $q_L(G) = 0$ существует решетка M , содержащая L , такая что $M/L = G$.

Факт 4.34. Пусть L — подрешетка унимодулярной решетки Λ . Тогда $D(L) \simeq D(L^\perp)$ и $q_L = -q_{L^\perp}$.

Для удобства поместим в таблицу 2 дискриминантные группы и формы для некоторых решеток, которые будут нами использоваться. Мы представим дискриминантную форму, предъявив ее значения на порождающих этой группы. Заметим, что это описание не единственно. К примеру, если дискриминантной группой является группа $\mathbb{Z}/(8)$ и форма обозначена через $1/8$, это значит, что для порождающей g этой группы выполнено $q(g) = 1/8$. Естественно, элемент $3g$ тоже порождает группу, и для него $q(3g) = 9/8$.

4.4.2. Эллиптические расслоения на поверхностях типа КЗ. Мы кратко напомним некоторые факты об эллиптических расслоениях с сечениями на поверхностях типа КЗ.

Определение 4.35. Эллиптической поверхностью типа КЗ с сечением называется тройка (S, π, σ) , в которой S — это поверхность типа КЗ, а $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\sigma : \mathbb{P}^1 \rightarrow S$ — морфизмы, такие, что общий слой морфизма π является эллиптической кривой, и $\pi \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{P}^1}$.

Эллиптическая кривая над полем комплексных чисел может быть реализована как гладкая кубическая кривая в \mathbb{P}^2 в *вейерштрассовой нормальной форме*

$$(4.36) \quad y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3.$$

Наоборот, уравнение (4.36) определяет плоскую эллиптическую кривую, если $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Решетка L	Группа $D(L)$	Форма q_L
H	$\{1\}$	0
$\langle -2n \rangle$	$\mathbb{Z}/(2n)$	$-1/(2n)$
A_1	$\mathbb{Z}/(2)$	$-1/2$
A_2	$\mathbb{Z}/(3)$	$4/3$
A_3	$\mathbb{Z}/(4)$	$5/4$
A_4	$\mathbb{Z}/(5)$	$4/5$
A_5	$\mathbb{Z}/(6)$	$-5/6$
A_6	$\mathbb{Z}/(7)$	$2/7$
A_7	$\mathbb{Z}/(8)$	$1/8$
A_8	$\mathbb{Z}/(9)$	$4/9$
A_9	$\mathbb{Z}/(10)$	$-9/10$
A_{10}	$\mathbb{Z}/(11)$	$4/11$
A_{11}	$\mathbb{Z}/(12)$	$-11/12$
D_5	$\mathbb{Z}/(4)$	$-5/4$
D_8	$\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$	0, 1
D_{10}	$\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$	1, 1
E_6	$\mathbb{Z}/(3)$	$2/3$
E_7	$\mathbb{Z}/(2)$	$1/2$
E_8	$\{1\}$	0

ТАБЛИЦА 2. Некоторые дискриминантные группы и формы

Аналогично, эллиптическая поверхность типа КЗ с сечением может быть вложена в \mathbb{P}^2 -расслоение $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6))$ как подмногообразие, заданное уравнением (4.36), где g_2, g_3 — глобальные сечения пучков $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(8), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(12)$ соответственно (иными словами, они являются однородными многочленами степеней 8 и 12). Особые слои морфизма π являются корнями однородного

многочлена $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(24))$ степени 24. Определить тип особого слоя над корнем p многочлена Δ можно с помощью алгоритма Тэйта, используя порядки обращения в ноль многочленов g_2 , g_3 и Δ в точке p .

Предложение 4.37. [CD07, Lemma 3.9] *Общий слой морфизма π и образ сечения σ порождают подрешетку H в $\text{Pic}(S)$. Более того, компоненты особых слоев морфизма π , которые не пересекают сечение σ , порождают подрешетку R решетки $\text{Pic}(S)$, которая ортогональна построенной решетке H , и группа $\text{Pic}(S)/(H \oplus R)$ изоморфна группе Морделла–Вейля $MW(S, \pi)$ сечений морфизма π .*

Предложение 4.38. [Mi89, Corollary VII.3.1] *Подгруппа кручения для группы $MW(S, \pi)$ вложена в $D(R)$.*

Если поверхности типа КЗ реализованы как гиперповерхности в торических многообразиях, можно комбинаторно построить эллиптические расслоения. Как и раньше, пусть $\Delta \subset \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$ — рефлексивный многогранник, и предположим, что $P \subset \mathcal{N}$ — плоскость, такая что многоугольник $Q = \Delta \cap P$ рефлексивен. Пусть $m \in \mathcal{M} = \mathcal{N}^{\vee}$ — нормальный вектор к плоскости P . Тогда P индуцирует тор-инвариантное отображение $\mathbb{P}(\Delta^{\vee}) \rightarrow \mathbb{P}^1$ с общим слоем \mathbb{P}_Q , заданном в однородных координатах как

$$\pi_m : (z_1, \dots, z_r) \mapsto \left[\prod_{\langle v_i, m \rangle > 0} z_i^{\langle v_i, m \rangle}, \prod_{\langle v_i, m \rangle < 0} z_i^{-\langle v_i, m \rangle} \right]$$

Ограничивая π_m на антиканоническую поверхность типа КЗ, получаем эллиптический пучок. Если многоугольник Q имеет сторону без внутренних целых точек, то это расслоение также имеет сечение. Более подробно см. в [KS02].

4.4.3. Решетки Пикара моделей Ландау–Гинзбурга.

X_{1-1} Напомним, что моделью Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья для X_{1-1} является многообразие

$$\begin{cases} y_0 y_1 y_2 y_3 y_4^3 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \end{cases}$$

с потенциалом

$$f = y_0.$$

Рассмотрев замену переменных

$$y_1 = \frac{x}{x+y+z+t}, \quad y_2 = \frac{y}{x+y+z+t}, \quad y_3 = \frac{z}{x+y+z+t}, \quad y_4 = \frac{t}{x+y+z+t}$$

(где x, y, z, t являются проективными координатами) получим модель Ландау–Гинзбурга

$$y_0 x y z t^3 = (x + y + z + t)^6, \quad f = y_0.$$

Таким образом в локальной карте, скажем, $t \neq 0$ мы получим торическую модель Ландау–Гинзбурга из таблицы 1

$$f_{1-1} = \frac{(x + y + z + 1)^6}{xyz}.$$

Общий элемент пучка, соответствующего f_{1-1} , бирационален общему элементу пучка исходной модели Ландау–Гинзбурга. Обратим потенциал: $u = 1/f$. Мы получим пучок

$$y_1 y_2 y_3 y_4^3 = u, \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1.$$

Эта модель является моделью Ландау–Гинзбурга для взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}(1 : 1 : 1 : 3)$, см. [CG11, (2)]. (В частности, по [CG11, Theorem 1.15], общий элемент нашего пучка бирационально эквивалентен поверхности типа КЗ.) Сделаем, однако, другую замену переменных в модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья, положив $x = y_1, y = y_2, z = y_4$. Тогда мы получим семейство

$$\tilde{f}_{1-1} = x + y + z + \frac{\lambda}{xyz^3} - 1 = 0$$

Пусть $\tilde{\Delta}_{f_{1-1}}$ — многогранник Ньютона многочлена \tilde{f}_{1-1} , и пусть $\tilde{\nabla}_{f_{1-1}} = \tilde{\Delta}_{f_{1-1}}^\vee$. Тогда слои пучка $\{\tilde{f}_{1-1} = 0\}$ можно компактифицировать в многообразии $T_{\tilde{\nabla}_{f_{1-1}}}$, ср. параграф 4.2. Нормальный вектор $(1, 2, 3)$ индуцирует эллиптическое расслоение с сечением. Вейерштрассова нормальная форма для слоев эллиптического расслоения имеет вид

$$-\frac{t^4 u}{48} + \frac{1}{864} t^5 (864 t^2 + 1728 t \lambda - t + 864 \lambda^2) + u^3 + v^2 = 0.$$

Следовательно, по алгоритму Тейта особые слои пучка являются слоями типа II^* в точках $t = 0, \infty$, и типа I_2 в точке $t = -\lambda$. Таким образом, решеткой Пикара полученных поверхностей типа является решетка $H \oplus E_8(-1) \oplus E_8(-1) \oplus A_1(-1) = M_1$.

Существует также другое расслоение, задающееся нормальным вектором $(1, 0, 1)$, которая дает поляризацию решеткой

$$H \oplus E_7(-1) \oplus D_{10}(-1).$$

X_{1-2} Компактифицируем наше семейство до семейства кватрик $\{(x + y + z + w)^4 - \lambda xyzw = 0\}$ в \mathbb{P}^3 . Пересекая кватрику с пучком плоскостей, проходящих через одну из таких прямых, получаем семейство дивизоров, базисным множеством которого является эта прямая. Вычитая эту прямую, получим пучок плоских кубик. Раздутие базисных точек этого пучка даст эллиптическое расслоение с сечением, которое даст поляризацию поверхности типа КЗ решеткой $H \oplus E_6(-1) \oplus A_{11}(-1)$. Это расслоение имеет сечение, являющееся 3-кручением, и, по предложению 4.38, оно не имеет других элементов кручения среди сечений. Таким образом, по факту, 4.32, общий слой Y_λ компактифицированного семейства имеет $d(NS(X)) = 4$. Как мы увидим, общие слои модели Ландау–Гинзбурга для многообразия $X_{1-17} = \mathbb{P}^3$ имеют расслоения этого же типа, и, сравнивая параметры двух уравнений

Вейерштрасса, увидим, что слои компактифицированных торических моделей Ландау–Гинзбурга для X_{1-1} и X_{1-17} одинаковы. Так как мы увидим, что слои компактификации для f_{1-17} поляризованы решеткой M_2 , получим $NS(X) \simeq M_2$.

X_{1-3} Компактифицируем слои для f_{1-3} до семейства антиканонических дивизоров в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ через $(x, y, z) \mapsto ((x : 1) \times (y : z : 1))$. А именно, $f_{1-3}^{-1}(\lambda)$ компактифицируется до поверхности типа КЗ

$$Y_\lambda = \{((x : x_0), (y : z : w)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \mid (x + x_0)^2(y + z + w)^3 - \lambda x x_0 y z w = 0\}.$$

Проекция $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ индуцирует эллиптическое расслоение на Y_λ для общего λ . Отображение $(x : x_0) \mapsto ((x : x_0), (1 : -1 : 0))$ дает сечение этого эллиптического расслоения. Представив слой над $(1 : a)$ в вейерштрассовой форме

$$\frac{a^3 \lambda^3 (24(1+a)^2 - a\lambda)}{48} X - \frac{a^4 \lambda^4 (36(1+a)^2 (6(1+a)^2 - a\lambda) + a^2 s^2)}{864} + X^3 + Y^2 = 0$$

и используя алгоритм Тейта видим, что особые слои имеют кодаиров тип IV^* над $a = 0, \infty$, I_6 над $a = -1$ и I_1 для $27(a+1)^2 - \lambda a = 0$. Отсюда, решетка $H \oplus E_6(-1) \oplus E_6(-1) \oplus A_5(-1)$ ранга 19 вложена в решетку Пикара слоя.

Как мы увидим ниже, компактифицированные слои для f_{1-16} имеют такой же тип и поляризованы решеткой M_3 . Сравнивая уравнения Вейерштрасса, заключаем, что слои для f_{1-3} изоморфны слоям для f_{1-16} , а, значит, слои для f_{1-3} также поляризованы решеткой M_3 .

X_{1-4} Так же как и выше, компактифицируем слои семейства в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Проекция на один из множителей \mathbb{P}^1 дает структуру эллиптического пучка с сечением на общем слое типа КЗ. Представив его в форме Вейерштрасса и запустив алгоритм Тейта, получим вложение решетки $H \oplus A_7(-1) \oplus D_5(-1) \oplus D_5(-1)$ ранга 19 в группу Пикара

общего слоя. Более того, группа Морделла–Вейля изоморфна группе $\mathbb{Z}/(4)$. Применяя приведенные выше факты о решетках для $L = H \oplus A_7(-1) \oplus D_5(-1) \oplus D_5(-1)$, $M = NS(X)$, $G = MW(X) \simeq \mathbb{Z}/(4)$, $D = L^*/L \simeq \mathbb{Z}/(8) \oplus \mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(4)$, получим $d(M) = 8$. Перебрав возможности для $G \subset D$, получим $M^*/M \simeq \mathbb{Z}/(8)$, и что q_M для порождающего элемента равно $7/8$.

Получим теперь, что $M \simeq M_4$. Пусть e — порождающая для прямого слагаемого $\langle -8 \rangle$ решетки M_4 . Так как решетки H и $E_8(-1)$ унимодулярны, группа $M_4^*/M_4 \simeq \mathbb{Z}/(8)$ порождена элементом $\epsilon = \frac{1}{8}e$, и $q_{M_4}(\epsilon) = -1/8$. Заметим, что элемент 3ϵ также порождает группу M_4^*/M_4 , и $q_{M_4}(3\epsilon) = -9/8 \equiv 7/8 \pmod{2}$. Таким образом, мы видим, что решетки M и M_4 имеют одну и ту же дискриминантную форму, и их ранги достаточно велики относительно числа порождающих дискриминантных групп. Значит, согласно факту 4.31, решетки M и M_4 изоморфны.

X_{1-5} Компактифицируем слои до особых квартик. Особенности компактификации являются точки $p_{\{i\},\{j\},\{4\}}$ для $1 \leq i \neq j \leq 3$ типа D_4 и точки $p_{\{i\}\{j\},\{k,4\}}$, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, типа A_1 . Таким образом, исключительные кривые порождают подрешетку ранга 15. Квартики также содержат прямые $L_{\{i\},\{j,4\}}$ и коники $C_{\{i,j,4\}}$ для $1 \leq i \neq j \leq 3$, на которые наложены соотношения

$$H_{\{1\}} = 2L_{\{1\},\{2,4\}} + 2L_{\{1\},\{3,4\}},$$

$$H_2 = 2L_{2(14)} + 2L_{2(34)},$$

$$H_3 = 2L_{3(14)} + 2L_{3(24)},$$

$$H_{124} = L_{1(24)} + L_{2(14)} + C_{124},$$

$$H_{134} = L_{1(34)} + L_{3(14)} + C_{134},$$

$$H_{234} = L_{2(34)} + L_{3(24)} + C_{234},$$

которые порождают решетку ранга 19.

Вычисляя матрицу пересечения для этих кривых (для этого необходимо раздуть особые точки и проследить, как собственные прообразы прямых на кватрике пересекают исключительные кривые), получим, что они порождают решетку с детерминантом 10, дискриминантной группой $\mathbb{Z}/(10)$ с образующей α , имеющей $q(\alpha) = 11/10$. Выбирая другую образующую $\beta = 3\alpha$, получим $q(\beta) = 99/10 \equiv -1/10 \pmod{2\mathbb{Z}}$. Отсюда наша решетка изоморфна решетке M_5 .

Мы показали, что для общего элемента пучка Y_λ , решетка $NS(X)$ содержит M_5 . Чтобы показать, что $NS(Y_\lambda)$ равна решетке M_5 , заметим, что так как решетка M унимодулярна и содержится в $NS(Y_\lambda)$, она должна выделяться прямым слагаемым. Так как решетка $NS(Y_\lambda)$ четна и имеет сигнатуру $(1, 18)$, ортогональное дополнение к $M \subset NS(Y_\lambda)$ должна быть четной, отрицательно определенной и иметь ранг 1, а, значит, задаваться как $\langle -2n \rangle$ для некоторого n . Из факта 4.32 следует, что $10/(\det NS(Y_\lambda)) = 5/n$ должно быть полным квадратом, откуда $n = 5$.

По-другому, пересечение особой кватрики с плоскостью, содержащей $L_{\{1\},\{2,4\}}$, состоит из $L_{\{1\},\{2,4\}}$ и (в общем случае) гладкой кубики. Пучок этих кубик после раздутия базисных точек задает структуру эллиптического расслоения на минимальном разрешении кватрики. Это расслоение имеет особые точки типов I_2^* , I_1^* , I_6 и $3I_1$. Оно также имеет одно сечение бесконечного порядка и одно сечение, являющееся 2-закручением. Отсюда, решетка Пикара общего слоя семейства является решеткой ранга 19, содержащая решетку

$$H \oplus D_6(-1) \oplus D_5(-1) \oplus A_5(-1)$$

с фактором $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

X_{1-6} Как и раньше компактифицируем слои для f_{1-6} до семейства особых кватрик обычным способом. Получим особенности типа A_1 в точках $(1 : -1 : 0 : 0)$, $(1 : 0 : -1 : 0)$ и $(0 : 1 : -1 : 0)$, особенности типа A_2 в точках $(1 : 0 : 0 : 0)$ и $(0 : 0 : 1 : -1)$, и особенности типа A_3 в точках $(0 : 1 : 0 : 0)$ и $(1 : 0 : 0 : -1)$. Эти кватрики также содержат 12 прямых

$$L_{\{1\},\{2,3\}}, L_{\{1\},\{3,4\}}, L_{\{1\},\{2,3,4\}}, L_{\{2\},\{3\}}, L_{\{2\},\{3,4\}}, L_{\{2\},\{1,3,4\}}, \\ L_{\{3\},\{4\}}, L_{\{3\},\{1,4\}}, L_{\{3\},\{1,2,4\}}, L_{\{4\},\{1,3\}}, L_{\{4\},\{2,3\}}, L_{\{4\},\{1,2,3\}}$$

с соотношениями, задающимися гиперплоскими сечениями $H_{\{1\}}$, $H_{\{2\}}$, $H_{\{3\}}$, $H_{\{4\}}$, $H_{\{1,3,4\}}$, $H_{\{1,2,3,4\}}$, $H_{\{3,4\}}$ и $H_{\{2,3\}}$. Эти соотношения показывают, что только шесть из двенадцати прямых линейно независимы. Отсюда, исключительные дивизоры и собственные прообразы прямых порождают подрешетку в решетке Пикара минимального разрешения ранга $13 + 6 = 19$.

Вычислив матрицу пересечения для этих 25 рациональных кривых получим, что решетка, которую они порождают, имеет детерминант ± 12 , дискриминантную группу $\mathbb{Z}/(12)$ и дискриминантную форму $23/12 \equiv -1/12 \pmod{2\mathbb{Z}}$. Значит, эта решетка изоморфна решетке M_6 . Аргумент, аналогичный примененному для случая многообразия X_{1-5} , показывает, с помощью факта 4.32, что решетка Пикара совпадает с M_6 .

X_{1-7} Опять компактифицируем слои до особых кватрик. Кватрики задаются уравнениями

$$(x + y + z + w)(yz(x + y + z + w) + (y + z + w)(z + w)^2) - \lambda xyzw = 0$$

Особенности имеют тип A_1 в точке $(0 : 1 : 0 : -1)$, тип A_2 в точках $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : -1 : 0)$ и $(\lambda : 0 : -1 : 1)$, тип A_3 в точке

$(0 : 0 : 1 : -1)$ и тип A_4 в точке $(1 : -1 : 0 : 0)$. Квартики содержат 8 прямых

$$L_{\{i\},\{1,2,3,4\}} \ (1 \leq i \leq 4), \ L_{\{2\},\{3,4\}}, \ L_{\{3\},\{2,4\}}, \\ L_{\{3\},\{4\}}, L_{\{234\},*} = \{y + z + w = x - \lambda w = 0\}$$

и 2 коники

$$C_1 = \{x = yz + (z + w)^2 = 0\}, \ C_4 = \{w = xy + (y + z)^2 = 0\},$$

которые связаны соотношениями, происходящими из гиперплоских сечений $H_{\{1\}}, H_{\{2\}}, H_{\{3\}}, H_{\{4\}}, H_{\{2,3,4\}}$ и $H_{\{1,2,3,4\}}$. Эти соотношения показывают, что 10 рациональных кривых на квартике порождают подрешетку ранга 5 в решетке Пикара. Таким образом их собственные прообразы, вместе с исключительными кривыми, порождают подрешетку в решетке Пикара ранга 19.

Вычисление матрицы пересечения кривых показывает, что они порождают решетку, изоморфную M_7 . Отсюда, как и в разобранных выше случаях, решеткой Пикара общего слоя является M_7 .

X_{1-8} Компактификация слоев до особых квартик дает 6 особых точек типа A_1 с координатами

$$(-1 : 0 : 0 : 1), (0 : -1 : 0 : 1), (0 : 0 : -1 : 1), \\ (1 : -1 : 0 : 0), (1 : 0 : -1 : 0), (0 : 1 : -1 : 0),$$

и особые точки типа A_2 с координатами

$$(1 : 0 : 0 : 0), (0 : 1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0).$$

На квартиках также лежит 13 прямых

$$L_{\{i\},\{1,2,3,4\}}, L_{\{j\},\{4\}}, L_{\{j\},\{k,4\}} \text{ для } 1 \leq i \leq 4, \ 1 \leq j \neq k \leq 3,$$

связанных соотношениями, задающимися гиперплоскими сечениями $H_{\{i\}}, H_{\{j,4\}}, H_{\{1,2,3,4\}}$ для $1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3$. Эти соотношения показывают, что ранг решетки, порожденной этими 13 прямыми, равен 7. Значит, их собственные прообразы вместе с исключительными кривыми порождают решетку ранга 19.

Вычисление матрицы пересечения 25 найденных рациональных кривых показывает, что детерминант порождаемой ими решетки равен ± 16 , а дискриминантной группой является группа $\mathbb{Z}/(16)$ с образующей α , такой, что $q(\alpha) = 23/16$. Взяв образующую $\beta = 5\alpha$, получим $q(\beta) = 575/16 \equiv -1/16 \pmod{2\mathbb{Z}}$. Значит, наша решетка изоморфна M_8 . В этом случае по факту 4.32 решеткой Пикара общего слоя является либо решетка M_8 , либо решетка M_2 . Согласно [Go07], наш пучок имеет ту же вариацию структур Ходжа, как и пучок, поляризованный решеткой M_8 и, таким образом, вариацию, отличную от вариации для M_2 . Значит, пучок поляризован решеткой M_8 .

X_{1-9} Компактифицируем слои обычным образом до квартик в \mathbb{P}^3 .

Эти квартики имеют структуру эллиптического пучка с сечением, получающуюся из сечений плоскостями, содержащими $L_{\{4\},\{1,2,3\}}$, которая дает поляризацию решетки Пикара минимального разрешения решеткой $H \oplus A_8(-1) \oplus A_2(-1) \oplus A_1(-1) \oplus E_6(-1)$ ранга 19. По факту 4.38, у этого расслоения нет сечений, кроме нулевого, так что решеткой Пикара должна быть решетка

$$H \oplus A_8(-1) \oplus A_2(-1) \oplus A_1(-1) \oplus E_6(-1) = M_9.$$

X_{1-10} Компактификация слоев дает квартики с прямыми

$$L_{\{1\},\{3\}}, L_{\{1\},\{4\}}, L_{\{1\},\{2,4\}}, L_{\{1\},\{3,4\}}, L_{\{2\},\{3\}}, L_{\{2\},\{4\}}, L_{\{2\},\{1,4\}}, L_{\{2\},\{3,4\}}, L_{\{3\},\{1,4\}}, \\ L_{\{3\},\{2,4\}}, L_{\{1,3\},\{4\}}, L_{\{2,3\},\{4\}}, L_{\{1,4\},*} = \{x + w = (s - 2)x + y = 0\},$$

$$L_{\{2,4\},*} = \{y + w = (s - 2)y + x = 0\},$$

Коники

$$C_{\{3,4\}} = \{z + w = xy + (\lambda - 2)z^2 = 0\},$$

$$C_{\{1,2,4\}} = \{x + y + w = xy + (\lambda - 3)(x + y)z + z^2 = 0\},$$

$$C = \{z = (\lambda + 1)w, (\lambda + 1)w^2 + xy = 0\},$$

$$C' = \{z = (\lambda + 1)w, 2w(w + x + y) + \lambda w(x + y) + xy = 0\},$$

и особенности типа A_3 в точках $(1 : 0 : 0 : 0)$ и $(0 : 1 : 0 : 0)$, типа A_2 в точке $(0 : 0 : 1 : 0)$ и типа A_1 в точках $(-1 : 0 : 0 : 1)$ и $(0 : -1 : 0 : 1)$.

Прямые связаны соотношениями, высекаемыми плоскостями $H_{\{1\}}$, $H_{\{2\}}$, $H_{\{3\}}$, $H_{\{4\}}$, $H_{\{1,3\}}$, $H_{\{2,3\}}$, $H_{\{1,4\}}$, $H_{\{2,4\}}$ и $H_{\{3,4\}}$.

Вычисление матрицы пересечения показывает, что решеткой Пикара является решетка M_{10} .

X_{1-11} По предложению 4.11, слои компактификации являются компактификациями для многочлена

$$\tilde{f}_{1-11} = x^4 - (\lambda y - z)(xw - xy - w^2)z = 0$$

Рассмотрим эллиптическое расслоение на слоях компактификации до квартик для многочлена \tilde{f}_{1-11} , задающееся пересечением с плоскостями, содержащими прямую $L_{\{1\},\{3\}}$. Приведя расслоение к форме Вейерштрасса и применив алгоритм Тейта, получим поляризацию решеткой $H \oplus E_7(-1) \oplus D_{10}(-1)$. Сравнивая вейерштрассову форму расслоения с вейерштрассовой формой аналогичного расслоения для f_{1-1} , увидим, что решеткой Пикара является M_1 .

X_{1-12} Компактифицируем слои пучка для f_{1-12} до квартик в \mathbb{P}^3 . Пересекая квартики с пучками плоскостей, содержащих прямую $L_{\{1\},\{2,4\}}$,

вычитая эту прямую и раздувая базисные точки, получим эллиптическое расслоение с сечением. Индуцированная поляризация задается решеткой $H \oplus E_6(-1) \oplus A_{11}(-1)$ ранга 19. Сравнивая расслоение с аналогичным расслоением для X_{1-17} , получим, что решетка Пикара общего слоя равна M_2 .

X_{1-13} Компактифицируем слои пучка для f_{1-13} до квартик в \mathbb{P}^3 . Пересекая эти квартики с плоскостями, содержащими прямую $L_{\{1\},\{4\}}$, получим эллиптическое расслоение, которое дает поляризацию решеткой $H \oplus E_6(-1) \oplus E_6(-1) \oplus A_5(-1)$. Группой Морделла–Вейля этого расслоения является группа $\mathbb{Z}/(3)$. Следовательно, применяя факт 4.32, получим $d(NS(X)) = \pm 6$. Сравнивая параметры с соответствующими расслоения для X_{1-3} и X_{1-16} , заключаем, что $NS(X) \simeq M_3$.

X_{1-14} Компактифицируя в торическом многообразии $T_{\nabla_{f_{1-14}}}$, рассмотрим эллиптическое расслоение, заданное сечением $(0, 0, 1)$. Оно имеет слои типа I_8 над ∞ и типа I_1^* над $t = \frac{1}{2}(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 16})$. Значит, слои дают поляризацию решеткой $H \oplus A_7(-1) \oplus D_5(-1) \oplus D_5(-1)$. Более того, группа Морделла–Вейля изоморфна $\mathbb{Z}/(4)$. Потому, как и в случае для X_{1-4} , общие слои поляризованы решеткой M_4 .

X_{1-15} Компактифицируем слои для f_{1-15} в $T_{\nabla_{f_{1-15}}}$. Вектор $m = (1, 1, 0)$ индуцирует эллиптическое расслоение с общим компактифицированным слоем Y_λ . Вейерштрассова форма этого расслоения имеет вид

$$-\frac{1}{48}t^2P(s,t)u + \frac{1}{864}t^3(s^2(-t) + 4t^2 + 12t + 8)(P(s,t) + 24(1+t)^2) + u^3 + v^2 = 0,$$

где $P(s,t) = s^4t^2 - 8s^2t^3 - 24s^2t^2 - 16s^2t + 16t^4 + 24t^3 - 8t^2 - 24t - 8$.

Это расслоение имеет сечение бесконечного порядка, задающееся как

$$t \mapsto \left(-\frac{1}{12}t(s^2t + 8t^2 + 12t + 4), -\frac{1}{2}st^2(t+1)^2 \right) = (u, v),$$

и сечение, являющееся 2-кручением

$$t \mapsto \left(\frac{1}{12} (-s^2t + 4t^2 + 12t + 8), 0 \right) = (u, v)$$

Значит, согласно предложению 4.37, решетка $NS(Y_\lambda)$ имеет ранг 19 и содержит решетку $H \oplus D_6(-1) \oplus D_5(-1) \oplus A_5(-1)$ с фактором $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Сравнивая это эллиптическое расслоение со случаем X_{1-5} , получим, что слои для f_{1-15} изоморфны слоям для f_{1-5} , а, значит, являются поверхностями типа КЗ с поляризацией M_5 .

X_{1-16} Вектор $m = (1, 2, 1)$ определяет на общем слое Y_λ компактифицированной модели Ландау–Гинзбурга структуру эллиптического расслоения. Вейерштрассовой формы этого расслоения является

$$-\frac{1}{48}st^3u(s^3t + 48t + 48) + \frac{1}{864}t^5(s^6(-t) - 72s^3t - 72s^3 + 864t^2 + 1728t + 864) + u^3 + v^2 = 0,$$

и она определяет особые слои типа III^* над $t = 0$, типа II^* над $t = \infty$ и типа I_3 над $t = -1$. Таким образом, слои поляризованы решеткой $N \oplus A_2(-1)$. По предложению 4.38, не существует сечений, являющихся кручением (дискриминантные группы двух особых слоев имеют взаимно простые порядки), так что $NS(Y_\lambda) = K \oplus A_2(-1)$, где $K = H \oplus E_8(-1) \oplus E_7(-1)$.

Заметим теперь, что $D(K \oplus A_2(-1)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_6$. Записав изоморфизм $\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ как $1 \mapsto (1, 1)$, мы сможем получить

$$q_{K \oplus A_2(-1)} : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Q}/(2\mathbb{Z}),$$

специфицируя

$$q_{K \oplus A_2(-1)}(1) = 1/2 + 4/3 = 11/6 \equiv -1/6 \pmod{2\mathbb{Z}}.$$

Таким образом, $q_{K \oplus A_2(-1)} \simeq q_{\langle -6 \rangle} \simeq q_{M_3}$. Поэтому по факту 4.31 имеем $NS(Y_\lambda) \simeq M_3$.

Для случаев X_{1-3} и X_{1-13} заметим, что вектор $m = (1, 0, 0)$ задает расслоение, поляризованное решеткой $H \oplus E_6(-1) \oplus E_6(-1) \oplus A_5(-1)$, а также дополнительные сечения.

X_{1-17} Общая антиканоническая поверхность типа КЗ в \mathbb{P}^3 имеет решетку Пикара $\langle 4 \rangle$, порожденную гиперплоским сечением. Мы утверждаем, что слои компактифицированной торической модели Ландау–Гинзбурга имеют поляризацию решеткой M_2 . Это можно явно увидеть из торического расслоения на $T_{\nabla_{f_{1-17}}}$, определенного нормальным вектором $m = (1, -1, -2)$. Ограничение этого расслоения на общий слой компактифицированной модели Ландау–Гинзбурга дает структуру эллиптического расслоения с уравнением Вейерштрасса

$$-\frac{1}{48} (s^4 + 144) t^4 u + \frac{1}{864} t^5 (s^6(-t) + 648s^2t + 864t^2 + 864) + u^3 + v^2 = 0$$

Применив алгоритм Тейта, мы видим, что особыми слоями являются слои типа II^* над $t = 0, \infty$, а, значит, поверхности типа КЗ поляризованы решеткой M . Более того,

$$(u, v) = \left(-\frac{4s^4 + 120s^2 + 108}{12s^2}, \frac{3(4s^4 + 30s^2 + 18)}{2s^3} \right)$$

дает сечение бесконечного порядка группе Морделла–Вейля, которое вместе с особыми слоями задает поляризацию решеткой ранга 19. Так как решетки Пикара слоев содержат подрешетку M , они должны совпадать с M_n для некоторого числа n , и, как и в случае X_{1-8} , применим [Go07], чтобы заключить, что решетка Пикара совпадает с M_2 .

Замечание 4.39 (ср. замечание 4.29). В работе [Go07] показано, что модели Ландау–Гинзбурга для обсуждаемых нами случаев имеют ту же самую

вариацию структур Ходжа (с точностью до подъема), как и модулярная вариация, связанная с произведением эллиптической кривой на изогенную ей. А именно, для гладкого трехмерного многообразия Фано основной серии X , положим $(N, d) = \left(\frac{(-K_X)^3}{2 \cdot i(X)^2}, i(X) \right)$, где $i(X)$ — индекс многообразия X . Пусть $X_0(N) + N$ — модулярная кривая $\overline{(\Gamma_0(N) + N) \backslash \mathbb{H}}$, и пусть t_N — главная модулярная форма для $X_0(N) + N$, такая, что $t_N = 0$ в образе каспа $i\infty$. Уравнение Пикара–Фукса модели Ландау–Гинзбурга для X является подъемом симметрического квадрата униформизирующего дифференциального уравнения для $X_0(N) + N$ с помощью $\lambda = t_N^d$.

Часть результата Гольшева, относящаяся к подъему, мы можем напрямую проверить, изучая слои модели Ландау–Гинзбурга.

- **Случаи X_{1-1} и X_{1-11} :** В обоих случаях мы имеем поляризацию $H \oplus E_7(-1) \oplus D_{10}(-1)$. Из того, что пространство модулей поверхностей типа КЗ, поляризованное решеткой $H \oplus E_7(-1) \oplus D_{10}(-1)$ одномерно, мы *апостериори* видим, что слои компактификаций Калаби–Яу торических моделей Ландау–Гинзбурга f_{1-1} и f_{1-11} являются изоморфными поверхностями типа КЗ.
- **Случаи X_{1-2} , X_{1-12} и X_{1-17} :** Аналогично, так как пространство модулей поверхностей типа КЗ, поляризованных решеткой

$$H \oplus E_6(-1) \oplus A_{11}(-1)$$

одномерно, мы *апостериори* видим, что компактификации слоев торических моделей Ландау–Гинзбурга f_{1-2} , f_{1-12} и f_{1-17} , изоморфны. Записав формы Вейерштрасса эллиптических расслоений, задающих в каждом случае поляризацию, можно послойно сравнить расслоения и проверить, что слои для X_{1-12} получаются из слоев для X_{1-2} с помощью подъема $\lambda \mapsto \lambda^2$, и, аналогично, слои для X_{1-17} получаются из слоев для X_{1-2} с помощью подъема $\lambda \mapsto \lambda^4$.

- **Случаи X_{1-3} , X_{1-13} и X_{1-16} :** Аналогично предыдущим случаям, используя поляризацию решеткой $H \oplus E_6(-1) \oplus E_6(-1) \oplus A_5(-1)$.
- **Случаи X_{1-4} и X_{1-14} :** Аналогично предыдущим случаям, используя поляризацию решеткой $H \oplus A_7(-1) \oplus D_5(-1) \oplus D_5(-1)$.
- **Случаи X_{1-5} и X_{1-15}** В этом случае подъем можно использовать, чтобы получить многочлен f_{1-15} .

Часть 5. Полные пересечения

5.1. КОНСТРУКЦИЯ ГИВЕНТАЛЯ

В этой части мы изучим торические модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в проективных пространствах. (Компактификации Калаби–Яу для них также обсуждаются в части 7.) Однако сначала мы опишем конструкцию Гивенталя из [Gi97b] для моделей Ландау–Гинзбурга полных пересечений Фано в гладких торических многообразиях, а также их интегралы периодов. Эту конструкцию мы применим к полным пересечениям, а ее обобщение на случай “хороших” торических вырождений — к поверхностям дель Пеццо (см. параграф 3.1) и, следуя [BCFKS97], к полным пересечениям в грассманианах (см. часть 6).

Пусть X — факториальное торическое многообразие Фано размерности N с числом Пикара ρ , соответствующее вееру Σ_X в решетке $\mathcal{N} \cong \mathbb{Z}^N$. Пусть $D_1, \dots, D_{N+\rho}$ — компоненты его граничного дивизора. Пусть Y_1, \dots, Y_k — классы обильных дивизоров на X , высекающих гладкое полное пересечение Фано Y . Положим $Y_0 = -K_X - Y_1 - \dots - Y_k$. Выберем базис

$$\{H_1, \dots, H_\rho\} \subset H^2(X),$$

состоящий из численно эффективных дивизоров. Введем формальные переменные q_1, \dots, q_ρ , см. параграф 1.2. Определим числа κ_i равенством $-K_Y = \sum \kappa_i H_i$.

Следующая теорема является частным случаем квантовой теоремы Лефшеца, см. [Gi97b, Theorem 0.1].

Теорема 5.1. *Пусть $\dim(Y) \geq 3$. Тогда свободный член регуляризованного I -ряда для Y равен*

$$(5.2) \quad \tilde{I}_0^Y(q_1, \dots, q_\rho) = \exp(\mu(q)) \cdot \sum_{\beta \in K} q^\beta \frac{\prod_{i=0}^l |\beta \cdot Y_i|!}{\prod_{j=1}^{N+\rho} |\beta \cdot D_j|!^{\frac{\beta \cdot D_j}{|\beta \cdot D_j|}}},$$

где $\mu(q)$ — коррекционный член, линейный по переменным q_i (i , в частности, равный нулю для случая индекса, большего 1). Для случая $\dim(Y) = 2$ верна та же самая формула после замены когомологий $H^2(Y)$ в определении ряда \tilde{I}_0^Y на ограничение когомологий $H^2(X)$ на Y .

Замечание 5.3. Заметим, что члены ряда (5.2) имеют ненулевые степени по переменным q_i .

Опишем теперь конструкцию Гивенталья модели Ландау–Гинзбурга, двойственной для Y , и вычислим ее периоды. Введем N формальных переменных $u_1, \dots, u_{N+\rho}$, соответствующих дивизорам $D_1, \dots, D_{N+\rho}$.

Напомним, что короткая точная последовательность 1.7 отождествляет $\text{Pic}(X)^\vee$ с решеткой соотношений на примитивные образующие лучей веера Σ_X , рассматриваемые как мономы Лорана от переменных u_i . С другой стороны, так как мы выбрали базис в $\text{Pic}(X)$, мы можем отождествить $\text{Pic}(X)^\vee$ и $\text{Pic}(X) = H^2(X)$. Значит, мы можем выбрать базис в решетке соотношений, соответствующий $\{H_i\}$ и, таким образом, $\{q_i\}$. Мы будем обозначать эти соотношения через R_i и интерпретировать их как мономы от переменных $u_1, \dots, u_{N+\rho}$. Мы также будем обозначать через D_i образы элементов $D_i \in \mathcal{D}$ в $\text{Pic} X$.

Выберем неф-разбиение, то есть разбиение множества $[1, N + \rho]$ на непесекающиеся подмножества E_0, \dots, E_k , такие что для всех $i \in [1, k]$ дивизор $\sum_{j \in E_i} D_j$ линейно эквивалентен гиперповерхности Y_i (что, в частности, означает, что дивизор $\sum_{j \in E_0} D_j$ линейно эквивалентен дивизору Y_0).

Следующее можно найти в обсуждении после [Gi97b, Corollary 0.4], см. также [HV00, §7.2]).

Определение 5.4. Моделью Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья для Y называется подмногообразие $LG_0(Y)$ в торе $\text{Spec } \mathbb{C}_q[u_1^{\pm 1}, \dots, u_{N+\rho}^{\pm 1}]$, заданное

уравнениями

$$(5.5) \quad R_i = q_i, \quad i \in [1, \rho],$$

и

$$\sum_{s \in E_j} u_s = 1, \quad j \in [1, k],$$

с функцией $w = \sum_{s \in E_0} u_s$, называемой *суперпотенциалом*. Зафиксировав дивизор $D \sim \sum r_i H_i \in \text{Pic}(Y)_{\mathbb{C}}$, определим *модель Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья* $LG(Y, D)$, соответствующую паре (Y, D) , положив $q_i = \exp(r_i)$. Положим $LG(Y) = LG(Y, 0)$.

Замечание 5.6. Суперпотенциал для модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья может быть определен как $w' = u_1 + \dots + u_{N+\rho}$. Однако мы не будем различать суперпотенциалы w и w' , так как $w' = w + k$, так что обе функции определяют одно и то же семейство над \mathbb{C}_q .

Для переменных x_1, \dots, x_r определим *стандартную логарифмическую форму от этих переменных* как

$$\Omega(x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{(2\pi i)^r} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_r}{x_r}.$$

Следующее определение можно найти в обсуждении после [Gi97b, Corollary 0.4] и в [Gi97a].

Определение 5.7. Для $N+\rho$ вещественных положительных чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N+\rho}$ определим цикл вещественной размерности $N + \rho$

$$\delta = \{ |u_i = \varepsilon_i| \} \subset \mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_{N+\rho}^{\pm 1}].$$

Интегралом Гивенталья для Y или для $LG_0(Y)$ называется интеграл

$$(5.8) \quad I_Y^0 = \int_{\delta} \frac{\Omega(u_1, \dots, u_{N+\rho})}{\prod_{i=1}^{\rho} (1 - \frac{q_i}{R_i}) \cdot \prod_{j=0}^k \left(1 - \left(\sum_{s \in E_j} u_s \right) \right)} \in \mathbb{C}[[q_1, \dots, q_{\rho}]].$$

Зафиксировав дивизор $D = \sum r_i H_i$, можно специализировать интеграл Гивенталья на антиканоническое направление и дивизор D , положив $q_i = e^{r_i t^{\kappa_i}}$ в интеграле (5.8), ср. определение 1.5. Результат специализации мы будем обозначать через $I_{(Y,D)}$. Положим $I_{(Y,0)} = I_Y$.

Замечание 5.9. Интеграл (5.8) не зависит от чисел ε_i , если они достаточно малы.

Замечание 5.10. Интеграл (5.8) определен с точностью до знака, так как мы не зафиксировали порядок переменных.

Следующая теорема хорошо известна, см. [Gi97b, Theorem 0.1] и обсуждение после [Gi97b, Corollary 0.4]).

Теорема 5.11. *Выполнено*

$$\tilde{I}_0^Y = I_Y^0.$$

Рецепт для построения моделей Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья и интегралов Гивенталья можно упростить. А именно, можно сделать подходящую мономиальную замену переменных $u_1, \dots, u_{N+\rho}$, чтобы избавиться от некоторых из них, используя уравнения (5.5). Более точно, так как \mathcal{N} является свободной группой, то, используя точную последовательность (1.7), получим изоморфизм

$$\mathcal{D} \cong \text{Pic } X^\vee \oplus \mathcal{N}.$$

Таким образом, можно найти мономиальную замену переменных $u_1, \dots, u_{N+\rho}$, введя новые переменные $x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_\rho$, такие, что

$$u_i = \tilde{X}_i(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_\rho, q_1, \dots, q_\rho),$$

откуда для всех $i \in [1, \rho]$ получим

$$\frac{R_i(u_1, \dots, u_{N+\rho})}{q_i} = \frac{1}{y_i}.$$

Положим

$$X_i = \tilde{X}_i(x_1, \dots, x_N, 1, \dots, 1, q_1, \dots, q_\rho).$$

Тогда $LG_0(Y)$ задается в торе $\text{Spec } \mathbb{C}_q[x_1^{\pm 1}, \dots, x_N^{\pm 1}]$ уравнениями

$$\left(\sum_{s \in E_j} \alpha_s X_s \right) = 1, \quad j \in [1, k],$$

с супепотенциалом $w = \sum_{s \in E_0} \alpha_s X_s$, где $\alpha_i = \prod q_j^{r_{i,j}}$ для некоторых целых чисел $r_{i,j}$.

Заметим, что для монома Лорана U_i от переменных u_j , $j \in [1, N + \rho]$, который не зависит от переменных u_i , выполнено

$$\Omega(u_1, \dots, u_i^{\pm 1} \cdot U_i, \dots, u_{N+\rho}) = \pm \Omega(u_1, \dots, u_i, \dots, u_{N+\rho}).$$

Это значит, что

$$(5.12) \quad I_Y^0 = \int_{\delta'} \frac{\pm \Omega(y_1, \dots, y_\rho) \wedge \Omega(x_1, \dots, x_N)}{\prod_{i=1}^\rho (1 - y_i) \prod_{j=0}^k \left(1 - \left(\sum_{s \in E_j} \alpha_s \tilde{X}_s \right) \right)}$$

для некоторого цикла δ' размерности $(N + \rho)$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\sigma} \frac{dU}{U} \wedge \Omega_0$$

для некоторой формы Ω_0 и цикл $\sigma = \sigma' \cap \{|U| = \varepsilon\}$ для некоторого цикла $\sigma' \subset \{U = 0\}$. Хорошо известно (см, к примеру, [АГҮ85, Theorem 1.1]), что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dU}{U} \wedge \Omega_0 = \int_{\sigma'} \Omega_0|_{U=0},$$

если оба интеграла определены (то есть, в частности, если форма Ω_0 не имеет полюса вдоль $\{U = 0\}$).

Обозначим

$$\Omega_0|_{U=0} = \text{Res}_U \left(\frac{dU}{U} \wedge \Omega_0 \right).$$

Взяв вычеты у правой части равенства (5.12) относительно переменных y_i , получим

$$I_Y^0 = \int_{\delta''} \frac{\pm \Omega(x_1, \dots, x_N)}{\prod_{j=0}^k \left(1 - \left(\sum_{s \in E_j} \alpha_s X_s\right)\right)}$$

для некоторого цикла δ'' размерности N .

Более того, можно ввести новый параметр t и положить $u_i \rightarrow tu_i$ для $i \in E_0$. Фиксируем класс дивизора $D = \sum r_i H_i$. Можно проверить, что после замены переменных $q_i = e^{r_i t^{k_i}}$ исходный интеграл ограничивается как интеграл

$$(5.13) \quad \int_{\delta_1} \frac{\pm \Omega(x_1, \dots, x_N)}{\prod_{j=1}^k \left(1 - \left(\sum_{s \in E_j} \gamma_s X_s\right)\right) \cdot \left(1 - t \left(\sum_{i \in E_0} \gamma_i X_i\right)\right)} = I_{(Y, D)}$$

для некоторых мономов γ_i от переменных e^{r_j} и цикла δ_1 размерности N , гомологически эквивалентного циклу

$$\delta_1^0 = \{|x_i| = \varepsilon_i \mid i \in [1, N]\}.$$

В частности, для $D = 0$ имеем $\gamma_i = 1$. Та же самая специализация определяет модель Ландау–Гинзбурга $LG(Y)$

$$(5.14) \quad \left(\sum_{s \in E_j} X_s\right) = 1, \quad j \in [1, k],$$

с суперпотенциалом $w = \sum_{s \in E_0} X_s$.

В дальнейшем мы будем использовать прямое обобщение конструкций Гивенталья на случай неторического многообразия X , имеющего малое (то есть с терминальными горенштейновыми особенностями) торическое вырождение T . А именно, пусть Y — полное пересечение Фано в многообразии X . Рассмотрим неф-разбиение множества лучей веера для многообразия T , соответствующее (вырождениям) гиперповерхностей, высекающих Y . Пусть $LG(Y)$ — результат применения конструкции Гивенталья для T и построенного неф-разбиения, так же как в случае полных пересечений в гладких торических

многообразиях. Батырев в работе [Ва97] предложил $LG(Y)$ в качестве модели Ландау–Гинзбурга для Y . Более того, в некоторых случаях, таких как случай полных пересечений в грассманианах (см. часть 6), эти модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья и интегралы Гивенталья могут быть упрощены с помощью бирациональных замен переменных и взятия вычетов. Это дает слабые модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в проективных пространствах (см. параграф 5.2) и, более общо, грассманианах (см. 6).

Мы также применим обобщение модели (5.14), для гладких полных пересечений во взвешенных проективных пространствах, см. параграф 5.2 и часть 9. Такие полные пересечения могут быть описаны как полные пересечения в гладких торических многообразиях, раздвиг особенности объемлющего пространства, лежащие вдали от полного пересечения, однако такое описание эквивалентно прямому применению конструкции (5.14), ср. [Prz07b].

5.2. СЛАБЫЕ МОДЕЛИ ЛАНДАУ–ГИНЗБУРГА

Применим теперь построения из параграфа 5.1 для случая полных пересечений в проективных пространствах.

Рассмотрим полное пересечение $Y \subset \mathbb{P}^N$ гиперповерхностей степеней d_1, \dots, d_k . Положим

$$d_0 = N + 1 - \sum d_i.$$

Предположим, что $d_0 \geq 1$, то есть что Y является многообразием Фано. Модель Ландау–Гинзбурга для Y и тривиального дивизора задается в торе

$$(\mathbb{C}^*)^N \cong \mathbb{T}[a_{i,j}, y_s], \quad i \in [1, l], j \in [1, d_i], s \in [1, d_0 - 1],$$

уравнениями

$$(5.15) \quad a_{i,1} + \dots + a_{i,d_i} = 1, \quad i \in [1, l],$$

и суперпотенциалом

$$w = y_1 + \dots + y_{d_0-1} + \frac{1}{\prod a_{i,j} \prod y_i}.$$

Многообразие, определяемое уравнениями (5.15), после замены переменных

$$x_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_{i,d_i}}, \quad i \in [1, l], j \in [1, d_i - 1]$$

становится бирациональным тору

$$(\mathbb{C}^*)^m \cong \mathbb{T}[x_{i,j}, y_s], \quad i \in [1, l], j \in [1, d_i - 1], s \in [1, d_0 - 1],$$

где $m = N - l$. Суперпотенциал w теперь задается многочленом Лорана

$$(5.16) \quad f_Y = \frac{\prod_{i=1}^l (x_{i,1} + \dots + x_{i,d_i-1} + 1)^{d_i}}{\prod_{i=1}^l \prod_{j=1}^{d_i-1} x_{i,j} \prod_{j=1}^{d_0-1} y_j} + y_1 + \dots + y_{d_0-1}.$$

По формуле (5.2) легко можно найти свободный член регуляризованного I -ряда для Y и сравнить его с рядом свободных членов для f_Y , формулу для которого можно найти комбинаторными методами, и удостоверится, что для f_Y выполнено условие периодов, то есть что этот многочлен является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для Y . Однако мы проверим, что эти ряды совпадают с интегралом Гивенталья.

Предложение 5.17. *Выполнено*

$$I_Y = \int_{\substack{|x_{i,j}|=\varepsilon_{i,j} \\ |y_s|=\varepsilon_s}} \frac{\Omega(x_{1,1}, \dots, x_{l,d_k-1}, y_1, \dots, y_{d_0-1})}{1 - t f_Y}.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\delta_1} \frac{\Omega(a_{1,1}, \dots, a_{l,d_k}, y_1, \dots, y_{d_0-1})}{\prod_{i=1}^l (1 - (a_{i,1} + \dots + a_{i,d_i})) \cdot \left(1 - t \cdot \left(\frac{1}{\prod a_{i,j} \prod y_s} + \sum y_s\right)\right)}$$

для некоторого цикла δ_1 размерности N , ср. (6.11).

Положим

$$x_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_{i,d_i}}, \quad i \in [1, l], j \in [1, d_i - 1].$$

Тогда получим

$$I = \int_{\delta'_1} \frac{\pm \Omega(x_{1,1}, \dots, x_{1,d_1-1}, \dots, x_{l,1}, \dots, x_{l,d_k-1}, a_{1,d_1}, \dots, a_{l,d_k}, y_1, \dots, y_{d_0-1})}{\prod_{i=1}^l \left(1 - \left(\sum_{j=1}^{d_i-1} x_{i,j} + 1\right) \cdot a_{i,d_i}\right) \cdot \left(1 - t \cdot \left(\frac{1}{\prod x_{i,j} \prod a_{i,d_i} \prod y_s} + \sum y_s\right)\right)}$$

для некоторого цикла δ'_1 размерности N .

Наконец, положим

$$Q_i = 1 - \left(\sum_{j=1}^{d_i-1} x_{i,j} + 1 \right) \cdot a_{i,d_i}, \quad i \in [1, l],$$

так что

$$a_{i,d_i} = \frac{1 - Q_i}{\sum_{j=1}^{d_i-1} x_{i,j} + 1}.$$

Теперь имеем

$$I = \int_{\delta''_1} \frac{\pm \Omega(x_{1,1}, \dots, x_{l,d_k-1}, Q_1, \dots, Q_k, y_1, \dots, y_{d_0-1})}{\prod_{i=1}^l (1 - Q_i) \cdot \left(1 - t \cdot \left(\frac{\prod_{i=1}^l (x_{i,1} + \dots + x_{i,d_i-1} + 1)^{d_i}}{\prod_{i=1}^l (1 - Q_i)^{d_i} \prod_{j=1}^{d_i-1} x_{i,j} \prod_{s=1}^{d_0-1} y_s} + y_1 + \dots + y_{d_0-1} \right) \right)}$$

для некоторого цикла δ''_1 размерности N . Взяв вычеты относительно переменных Q_i и, возможно, перенумеровав переменные, получим

$$I = \int_{\Delta} \frac{\Omega(x_{1,1}, \dots, x_{l,d_k-1}, y_1, \dots, y_{d_0-1})}{1 - t f_Y}$$

для некоторого цикла Δ размерности $N - k$.

Положим $\Delta = \{|x_{i,j}| = \varepsilon_{i,j}, |y_s| = \varepsilon_s\}$ и определим циклы $\delta_2, \dots, \delta_{l+1} = \Delta$ так, что δ_{i-1} является границей трубчатой окрестности цикла δ_i для всех $i \in [3, l+1]$ и δ''_1 является границей трубчатой окрестности цикла δ_2 . Можно проверить, что цикл δ''_1 , а, значит, и цикл δ_1 , гомологически эквивалентен циклу

$$\delta_1^0 = \{|a_{i,j}| = \varepsilon_{i,j}, |y_s| = \varepsilon_s\},$$

что и завершает доказательство. □

5.3. КОМПАКТИФИКАЦИИ КАЛАБИ–ЯУ

В этом параграфе мы построим компактификацию лог-Калаби–Яу для модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья f_Y для полного пересечения Y , следуя методам из параграфа 4.3.

Определение 5.18. Фиксируем натуральные числа d_1, \dots, d_k и N , такие что число $I = N + 1 - \sum d_j$ положительно. Многочлен Лорана

$$f_{d_1, \dots, d_k; I} = \frac{\prod_{i=1}^k (x_{i,1} + \dots + x_{i,d_i-1} + 1)^{d_i}}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{d_i-1} x_{i,j} \prod_{j=1}^{I-1} y_j} + y_1 + \dots + y_{I-1}$$

называется *стандартным типа* $(d_1, \dots, d_k; I)$.

В частности, положив $i_Y = N + 1 - \sum d_j$, получим $f_Y = f_{d_1, \dots, d_k; i_Y}$. Торическое многообразие Фано T_Y , веерным многогранником которого является многогранник $\Delta = N(f_Y)$, называется *ассоциированным с f* ; оно детально описано в параграфе 5.4. Рассмотрим многогранник $\nabla = \Delta^\vee$. Из конкретного описания многогранника Δ можно увидеть, что многогранник ∇ целочисленный; координаты его вершин задаются строками матрицы $M_{d_1, \dots, d_k; i_Y}$, определенной ниже. Другими словами, многообразие T_Y и многогранник Δ рефлексивны.

Другое важное свойство многочлена $f_{d_1, \dots, d_k; I}$ связано с его коэффициентами. Пусть Q — грань многогранника Δ , и пусть $f_{d_1, \dots, d_k; I, Q}$ — ограничение многочлена $f_{d_1, \dots, d_k; I}$ на Q , то есть $f_{d_1, \dots, d_k; I, Q}$ — это сумма тех коэффициентов многочлена $f_{d_1, \dots, d_k; I}$, которые лежат в Δ . Тогда многочлен $f_{d_1, \dots, d_k; I, Q}$ также стандартный.

Теорема 5.19. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^N$ — полное пересечение Фано гиперповерхностей степеней d_1, \dots, d_k . Положим $i_Y = N + 1 - \sum d_i$. Пусть f_Y — торическая модель Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья для Y . Тогда f_Y допускает компактификацию лог-Калаби–Яу $f_Y: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$, такую что слой $f_Y^{-1}(\infty)$ — приведенный дивизор, который является объединением гладких рациональных многообразий. Он состоит из $k_{d_1, \dots, d_k; i_Y}$ компонент (см. определение 5.20) и комбинаторно задается триангуляцией сферы.

Доказательство. Мы будем следовать стратегии, предложенной в доказательстве теоремы 4.9. Пусть T_Y^\vee — торическое многообразие Фано, такое

что $F(T_Y^\vee) = \nabla$. Антиканоическая линейная система на T_Y^\vee может быть описана как (проективизация) линейной системы многочленов Лорана, многогранники Ньютона которых лежат в Δ , см. факт 1.9. Таким образом, семейство $\{f_Y = \lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ может быть компактифицировано до семейства (особых) антиканонических сечений Калаби–Яу многообразия T_Y^\vee . (Для простоты мы используем одно и то же обозначение f_Y для функции на торе $(\mathbb{C}^*)^{N-k}$ и на всех его компактификациях.) Это семейство порождено общим слоем (то есть слоем $f_Y^{-1}(\lambda)$ для общего $\lambda \in \mathbb{C}$) и слоем над бесконечностью $f_Y^{-1}(\infty)$, который является ни чем иным, как граничным дивизором D многообразия T_Y^\vee .

Чтобы построить компактификацию лог-Калаби–Яу, необходимо разрешить особенности многообразия T_Y^\vee и базисного множества пучка $B = f_Y^{-1}(\lambda) \cap D$ и проверить, что все разрешения крепантны.

Пусть $D = D_1 \cup \dots \cup D_r$, где D_i — неприводимые компоненты дивизора D . Тогда $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$, где $B_i = f_Y^{-1}(\lambda) \cap D_i$. Граничный дивизор D_i соответствует вершине многогранника ∇ и, таким образом, грани Q_i многогранника Δ . Как многообразие он задается следующим образом. Рассмотрим формальные переменные z_1, \dots, z_s , соответствующие целым точкам грани Q_i , и пусть R_1, \dots, R_p — однородные биномы от переменных z_j , соответствующие соотношениям на целые точки грани Q_i . Тогда $D_i = \{R_j = 0 \mid j = 1, \dots, p\} \subset \mathbb{P}[z_1 : \dots : z_s]$. В частности, это значит, что дивизор D_i является конусом над образом при отображении Сегре произведения отображенных по Веронезе проективных пространств или (в тех случаях, когда $i_Y = 1$ или $i_Y = 2$) самим образом при отображении Сегре произведения образов Веронезе проективных пространств. Мы будем называть такие граничные дивизоры типа I и типа II соответственно. Ограничение многочлена f_Y на грань Q_i является суммой мономов (с некоторыми коэффициентами),

которые соответствуют целым точкам грани Q_i и, таким образом, переменным z_j ; сумма переменных z_j с коэффициентами многочлена f_Y является линейным сечением многообразия $D_i \subset \mathbb{P}[z_1 : \dots : z_s]$, задающим B_i .

Если компонента дивизора D_i имеет тип I, то одна из переменных z_j , скажем z_s , соответствует элементу базиса решетки \mathcal{N} , определяемому переменной y_q для некоторого $q = 1, \dots, i_Y - 1$. Это значит, что B_i изоморфно проектируется на свой образ при проекции $\mathbb{P}[z_1 : \dots : z_s] \rightarrow \mathbb{P}[z_1 : \dots : z_{s-1}]$, которым является (конус над) образом при отображении Сегре произведения тех же отображенных по Веронезе проективных пространств, что и для D_i . В частности это означает, что “особенности гиперплоского сечения B_i приходят с компоненты D_i ”, так что после разрешения особенностей многообразия T_Y^\vee компонента B_i становится гладкой. Пусть теперь компонента D_i имеет тип II. Тогда B_i является объединением конусов над линейными сечениями (с кратностями) проективных пространств, так что оно является объединением гладких проективных пространств (с кратностями), см. лемму 4.7.

Рассмотрим торическое разрешение многообразия \tilde{T}_Y^\vee , заданное веером, полученным триангуляцией многогранника ∇ , вершинами которой являются все целые точки границы многогранника ∇ . Конусы этого веера порождены элементами базиса решетки \mathcal{N} (теми, что порождены переменным y_i) и элементами (произведений) стандартных триангуляций равносторонних симплексов. Это значит, что они образуют часть базиса решетки \mathcal{N} , то есть многообразии \tilde{T}_Y^\vee гладкое и является крепантным разрешением многообразия T_Y^\vee , ср. лемму 4.6. Более того, после этого разрешения базисное множество B становится объединением гладких рациональных многообразий (возможно с кратностями). После крепантного разрешения $Z \rightarrow \tilde{T}_Y^\vee$ базисного множества (крепантность следует из гладкости многообразия \tilde{T}_Y^\vee и компонент множества B , а также из того факта, что $B \in \tilde{T}_Y^\vee$ имеет чистую коразмерность два, ср. предложение 4.8, получаем требуемую компактификацию лог-Калаби–Яу Z .

Теперь дадим явное описание многогранников Δ и ∇ . Вершинами многогранника $\Delta \subset \mathcal{N}$ являются всевозможные векторы u и v , такие, что

$$u = (u_{1,1}, \dots, u_{1,d_1-1}, \dots, u_{k,1}, \dots, u_{k,d_k-1}, -1, \dots, -1),$$

(так что последние $i_Y - 1$ координат вектора u равны -1), где

$$(u_{i,1}, \dots, u_{i,d_i-1}) = (-1, \dots, d_i - 1, \dots, -1)$$

с числом $d_i - 1$, стоящим на всех $d_i - 1$ возможных местах, или

$$(u_{i,1}, \dots, u_{i,d_i-1}) = (-1, \dots, -1),$$

а также $v = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на одном из последних $i_Y - 1$ мест.

Вершинами многогранника ∇ являются строки матрицы

$$M_{d_1, \dots, d_k; i_Y} =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc|ccc} i_Y & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & i_Y & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i_Y & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\ -i_Y & -i_Y & \dots & -i_Y & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & i_Y & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & i_Y & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & i_Y & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -i_Y & -i_Y & \dots & -i_Y & -1 & \dots & -1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & i_Y - 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & i_Y - 1 \end{array} \right),$$

которая образована из k блоков размеров $(d_i - 1) \times d_i$ и одним последним блоком размера $i_Y \times i_Y$.

Целыми точками многогранника ∇ являются центр координат и точки на границе. Веер многообразия \tilde{T}_Y^\vee задается триангуляцией, вершинами симплексов которой являются целые точки многогранника ∇ , лежащие на границе. Это значит, что граничные дивизоры многообразия \tilde{T}_Y^\vee находятся во взаимно-однозначном соответствии с граничными точками. Более того, исключительные дивизоры разрешения базисного множества B не лежат в слое над бесконечностью. Это значит, что число компонент слоя над бесконечностью многообразия Z равно $k_{d_1, \dots, d_k; i_Y}$, см. определение 5.20, а комбинаторно они образуют триангуляцию сферы (что значит, что вершины триангуляции соответствуют компонентам слоя над бесконечностью, ребра соответствуют пересечениям компонент, и т. д.). В частности, слой над бесконечностью приведен, так что вырождение слоев к слою над бесконечностью является полустабильной редукцией, а монодромия семейства вокруг бесконечности максимально унипотентна. Компактификация Z является вручную компактифицированной моделью Ландау–Гинзбурга, см. определение 3.17. \square

Определение 5.20. Обозначим число целых точек в выпуклой оболочке строчек матрицы $M_{d_1, \dots, d_k; i_Y}$ как элементов решетки \mathbb{Z}^{N-k} через l . Пусть число $k_{d_1, \dots, d_k; i_Y}$ равно $l - 1$.

Замечание 5.21. Можно определить слабые модели Ландау–Гинзбурга (то есть многочлены Лорана, удовлетворяющие условию периодов) гладких хорошо сформированных полных пересечений Фано во взвешенных проективных пространствах, если они имеют так называемые *хорошие неф-разбиения*. Согласно параграфу 5.4, для них выполнено торическое условие. Такие неф-разбиения существуют для полных пересечений дивизоров Картье и полных пересечений коразмерности не больше 2, см. часть 9. Доказательство теоремы 5.19 можно повторить для этих слабых моделей Ландау–Гинзбурга, если

их многогранники Ньютона рефлексивны (что, впрочем, не является общим случаем).

Проблема 5.22. *Найти формулу, которая выражает число $k_{d_1, \dots, d_k; i_Y}$ через степени d_1, \dots, d_k, i_Y .*

Замечание 5.23 (ср. замечание 4.14). Пусть T — гладкое торическое многообразие, такое что $F(T) = \Delta$. Пусть f — общий многочлен, такой, что $N(f) = \Delta$. Многочлен Лорана f является торической моделью Ландау–Гинзбурга для пары (T, D) , где D — общий дивизор на \tilde{T} . Действительно, условие периодов выполнено согласно [Gi97b]. Следуя описанной в доказательстве теоремы 5.19 процедуре компактификации можно видеть, что базисное множество B является объединением гладких трансверсально пересекающихся многообразий коразмерности 2 (не обязательно рациональных). Это значит, что, также как и выше, многочлен f удовлетворяет условию Калаби–Яу. Наконец, торическое условие для f выполнено тавтологически. Таким образом, многочлен f является торической моделью Ландау–Гинзбурга для пары (T, D) .

5.4. ТОРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛАНДАУ–ГИНЗБУРГА

В этом параграфе мы докажем, что для гладких полных пересечений Фано во взвешенных проективных пространствах выполняется торическое условие.

Рассмотрим гладкое полное пересечение X дивизоров степеней d_1, \dots, d_k во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_r)$, $w_0 \leq w_1 \leq \dots \leq w_r$. Обозначим через $d_0 = \sum w_i - \sum d_j$ его индекс Фано. Пусть $w_0 = 1$ и пусть существует разбиение множества $I = \{0 \dots r\}$ на такие $k + 1$ непересекающихся подмножества I_0, \dots, I_k , что

$$\sum_{j \in I_i} w_j = d_i, \quad i = 0, \dots, k,$$

и $w_0 \in I_0$. Иначе говоря, выберем хорошее неф-разбиение для X . Оно существует для полных пересечений дивизоров Картье (см. предложение 9.8) или в случае $k = 1, 2$, см. теорему 9.15). Обозначим через w_{i0}, \dots, w_{im_i} элементы множества I_i для $0 \leq i \leq k$. Аналогично формуле (5.16), построим многочлен

$$(5.24) \quad f_X = \frac{(x_{1,0} + \dots + x_{1,m_1})^{d_1} \cdot \dots \cdot (x_{k,0} + \dots + x_{k,m_k})^{d_k}}{\prod x_{i,j}^{w_{ij}}} + x_{0,1} + \dots + x_{0,m_0},$$

где переменная $x_{i,0}$ равна 1 для $0 \leq i \leq m_i$. Комбинаторно можно видеть, что он является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X , см. [Prz08b].

Так как многообразие X является полным пересечением, для нахождения его торического вырождения мы будем вырождать определяющие это многообразие многочлены к достаточно общим биномиальным многочленам. Однако на самом деле мы будем строить вырождение к торическому многообразию, соответствующему многочлену f_X .

Теорема 5.25. *Существует плоское вырождение многообразия X к торическому многообразию $T_{N(f_X)}$.*

Доказательство. Для простоты мы ограничимся случаем неф-разбиения I_0, I_1, \dots, I_k , такого что $w_{0j} = 1$ для $0 \leq j \leq m_0$; это выполнено, например, когда X является пересечением дивизоров Картье, см. замечание 9.13. Общий случай делается аналогично. Заметим, что в этом случае $d_0 = m_0 + 1$.

Положим $\Delta_{f_X} = N(f_X)$ и $T = T_{\Delta_{f_X}}$. Для доказательства теоремы покажем, что T можно вложить как полное пересечение степеней d_1, \dots, d_k в $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_r)$. Это можно сделать, непосредственно сравнив образующие и соотношения для $r \cdot d_0$ -го антиплюриканонического отображения многообразия T для некоторого числа r с образующими и соотношениями d_0 -го отображения Веронезе для $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_r)$, см. пример 5.26. Однако мы воспользуемся другим, более инвариантным описанием, избегая образующих и соотношений. Сначала применим преобразование координат, чтобы перейти к подалгебре Веронезе и получить более удобное описание многообразия T . Мы применим

результат Альтмана (см. [Al95, Theorem 3.5]), который связывает разложение по Минковскому многогранника с торическим полным пересечением, то есть торическим многообразием X_1 , эквивариантно вложенным как полное пересечение в другом торическом многообразии X_2 . В нашем случае многообразием X_1 будет наше многообразие T , а многообразием X_2 будет наше взвешенное проективное пространство.

Опишем многообразие T . Рассмотрим решетку

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{i=0}^k \mathbb{Z}^{m_i}$$

с базисом b_{ij} для $0 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq m_i$; обозначим через \mathcal{M} двойственную решетку. Для любого индекса i положим $b_{i0} = 0$. Пусть $\Delta_i = \text{conv} \{b_{ij}\}_{j=0}^{m_i}$ для $i \geq 1$ и положим $\Delta_0 = \text{conv} \{b_{ij}\}_{j=1}^{m_0}$. Тогда

$$\Delta_{f_X} = \text{conv} \left(\sum_{i \geq 1} d_i \Delta_i - \sum_{i \geq 0, j \geq 1} w_{ij} b_{ij}, \Delta_0 \right).$$

Положим $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot (\Delta_f, 1)$, и обозначим через c вектор $(\underline{0}, 1)$ в $\mathcal{N} \oplus \mathbb{Z}$. Тогда $T = T_{\Delta_{f_X}}$ задается как $\text{Proj } \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap (\mathcal{M} \oplus \mathbb{Z})]$, где \mathbb{Z} -градуировка на Proj задана вектором c .

Теперь сделаем преобразование координат для того, чтобы получить более удобное описание многообразия T . Рассмотрим автоморфизм решетки $\mathcal{N} \oplus \mathbb{Z}$, положив

$$\begin{aligned} b_{0j} &\mapsto b_{0j} - c & 1 \leq j \leq m_0 \\ b_{ij} &\mapsto b_{ij} & i \geq 1, 1 \leq j \leq m_i \\ c &\mapsto c \end{aligned}$$

Этот автоморфизм отображает σ в σ' , где

$$\sigma' = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot \left(\sum_{i \geq 1} d_i \Delta_i - \sum_{i \geq 0, j \geq 1} w_{ij} b_{ij} + d_0 c \right) + \mathbb{Q}_{\geq 0} \Delta_0.$$

Заметим, что мы можем заменить σ' на

$$\sigma'' = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot \left(\sum_{i \geq 1} d_i \Delta_i - \sum_{i \geq 0, j \geq 1} w_{ij} b_{ij} + c \right) + \mathbb{Q}_{\geq 0} \Delta_0,$$

и мы по-прежнему будем иметь $T \cong \text{Proj } \mathbb{C}[(\sigma'')^\vee \cap (\mathcal{M} \oplus \mathbb{Z})]$, где \mathbb{Z} -градуировка на Proj опять задается вектором c . Действительно, во вложении

$$\mathbb{C}[(\sigma')^\vee \cap (\mathcal{M} \oplus \mathbb{Z})] \hookrightarrow \mathbb{C}[(\sigma'')^\vee \cap (\mathcal{M} \oplus \mathbb{Z})],$$

восходящем к вложению решеток $\mathcal{M} \oplus \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{M} \oplus \mathbb{Z}$, которое отображает c^\vee в $d_0 c^\vee$, левая часть является не чем иным, как d_0 -ой подалгеброй Веронезе правой части. (Мы обозначаем элементы базиса решетки $\mathcal{M} \times \mathbb{Z}$, двойственного к b_{ij} и c соответственно через b_{ij}^\vee и c^\vee .)

Применим теперь результат Альтмана, чтобы представить $X_1 = T$ как полное пересечение в другом торическом многообразии X_2 . Обозначим через Q пересечение конуса σ'' с гиперплоскостью $[c^\vee = 1]$, рассматриваемой как естественное косечение в $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$. А именно, имеем

$$Q = \sum_{i \geq 1} d_i \Delta_i - \sum_{i \geq 0, j \geq 1} w_{ij} b_{ij} + \mathbb{Q}_{\geq 0} \Delta_0.$$

Таким образом, естественное разложение сечения Q в сумму Минковского, компактные части слагаемых которой состоят из точки $-\sum_{i \geq 0, j \geq 1} w_{ij} b_{ij}$ и расширенных симплексов $d_i \Delta_i$ для $i \geq 1$. Рассмотрим решетку $\widehat{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \oplus \mathbb{Z}^{k+1}$, в которой вторая компонента имеет базис c_i для $0 \leq i \leq k$; обозначим через $\widehat{\mathcal{M}}$ двойственную ей решетку. Определим $\widehat{\sigma} \subset \widehat{\mathcal{N}}_{\mathbb{Q}}$ как конус, порожденный

$$\begin{aligned} & \Delta_0, \quad \Delta_i + c_i, \quad 1 \leq i \leq k, \\ & - \sum_{i \geq 0, j \geq 1} w_{ij} b_{ij} + c_0. \end{aligned}$$

Согласно [Al95, Theorem 3.5], существует замкнутое вложение

$$\text{Proj } \mathbb{C}[(\sigma'')^\vee \cap (\mathcal{M} \oplus \mathbb{Z})] \hookrightarrow \text{Proj } \mathbb{C}[(\widehat{\sigma})^\vee \cap (\widehat{\mathcal{M}})] = X_2,$$

где \mathbb{Z} -градуировка для последней полугрупповой алгебры задается через $\widehat{c} = c_0 + \sum_{i=1}^k d_i c_i$. По той же самой теореме, это вложение в точности задается уравнениями

$$\chi^{d_i c_0^\vee} - \chi^{c_i^\vee} \quad 1 \leq i \leq k,$$

где для $u \in \widehat{M}$ через χ^u обозначен соответствующий характер.

Покажем теперь, что многообразие X_2 является нашим взвешенным проективным пространством. Явное вычисление дает, что $(\widehat{\sigma})^\vee$ порождено векторами

$$\begin{aligned} b_{ij}^\vee + w_{ij} c_0^\vee, & \quad 0 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq m_i, \\ c_0^\vee, \\ c_i^\vee - \sum_{j=1}^{m_i} (b_{ij}^\vee - w_{ij} c_0^\vee), & \quad 1 \leq i \leq k, \end{aligned}$$

и является, таким образом, гладким симплицальным конусом, в котором образующие имеют веса w_{ij} , $w_{00} = 1$ и $w_{i0} = d_i - \sum_{j \geq 1} w_{ij}$ относительно \widehat{c} соответственно. Таким образом, $\text{Proj } \mathbb{C}[(\widehat{\sigma})^\vee \cap (\widehat{M})]$ является стандартным описанием многообразия $\mathbb{P}(w_{00}, \dots, w_{km_k})$, так что мы получили вложение многообразия T как полного пересечения степеней d_1, \dots, d_k . Вырождая уравнения, определяющие в $\mathbb{P}(w_{00}, \dots, w_{km_k})$ многообразии X , мы получим требуемое вырождение X к T . \square

Пример 5.26 (поверхность дель Пеццо S_2). Рассмотрим на примере поверхности S_2 описание вырождения через порождающие и соотношения, ср. замечание 3.4. Эта поверхность является гиперповерхностью степени 4 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$. Ее торической моделью Ландау–Гинзбурга является многочлен

$$f_{S_2} = \frac{(x + y + 1)^4}{xy}.$$

Вершины соответствующего многоугольника Ньютона Δ_{f_X} соответствуют столбцам матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вершины двойственного многоугольника $\nabla_{f_{S_2}} = \Delta_{f_{S_2}}^\vee$ соответствуют столбцам матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, этот многоугольник не целый (так что многоугольник $\Delta_{f_{S_2}}$ не рефлексивен). Однако, увеличив его в два раза, получим многоугольник $\nabla_{f_{S_2}}^2 = 2 \cdot \nabla_{f_{S_2}}$, который целочисленен. Целыми точками многоугольника $\nabla_{f_{S_2}}^2$ являются точки $u = (-1, -1)$ и $v_{ab} = (a, b)$ для $a, b \geq 0$, $a + b \leq 2$. Они соответствуют координатам в однородном координатном кольце для T в двухантиканоническом вложении.

Аффинные однородные соотношения между этими точками соответствуют биномиальным соотношениям в идеале, задающем T . В нашем случае эти соотношения порождены соотношениями для 2-го отображения Веронезе

$$\begin{aligned} v_{20} + v_{02} &= 2v_{11}, & v_{20} + v_{01} &= v_{10} + v_{11}, \\ v_{20} + v_{00} &= 2v_{10}, & v_{02} + v_{10} &= v_{01} + v_{11}, \\ v_{02} + v_{00} &= 2v_{01} \end{aligned}$$

и соотношением

$$u + v_{11} = 2v_{00}.$$

С другой стороны, рассмотрим 2-е отображение Веронезе гиперповерхности $\{x_0x_1x_2 = y_0^4\} \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 1)$. В координатах $z_{02} = x_0^2$, $z_{20} = x_1^2$, $w = x_2$, $z_{00} = y_0^2$, $z_{11} = x_0x_1$, $z_{01} = x_0y_0$, $z_{10} = x_1y_0$ эта гиперповерхность задается уравнением

$$wz_{11} = z_{00}^2,$$

вместе с пятью уравнениями, задающими образ Веронезе

$$\begin{aligned} z_{20}z_{02} &= z_{11}^2, & z_{20}z_{01} &= z_{10}z_{11}, \\ z_{20}z_{00} &= z_{10}^2, & z_{02}z_{10} &= z_{01}z_{11}, \\ z_{02}z_{00} &= z_{01}^2. \end{aligned}$$

Они соответствуют выписанным выше аффинным однородным соотношениям, поэтому мы можем задать T как гиперповерхность $\{x_0x_1x_2 = y_0^4\} \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 1)$. Таким образом, вырождая уравнения, определяющие поверхность S_2 , мы получим вырождение поверхности дель Пеццо степени 2 к T .

Предложение 5.17, теорема 5.19 и теорема 5.25 дают следующее.

Следствие 5.27. *Гладкие полные пересечения Фано имеют торические модели Ландау–Гинзбурга.*

Часть 6. Полные пересечения в грассманианах

Оказывается, конструкции Гивенталья можно применить не только к полным пересечениям в гладких торических многообразиях, но и к полным пересечениям, в многообразиях, допускающих ”хорошие“ торические вырождения. В этом разделе мы воспользуемся такими вырождениями для грассманианов $\text{Gr}(n, k + n)$, $k, n \geq 2$, и построим слабые модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в них. Мы воспользуемся конструкциями моделей Ландау–Гинзбурга, аналогичные гивенталевским, построенные в работах [BCFKS97] и [BCFKS98] (см. также [ЕНХ97, В25]).

6.1. КОНСТРУКЦИЯ

Определим колчан \mathbb{Q} как множество вершин

$$\text{Ver}(\mathbb{Q}) = \{(i, j) \mid i \in [1, k], j \in [1, n]\} \cup \{(0, 1), (k, n + 1)\}$$

и множество стрелок $\text{Ar}(\mathbb{Q})$, которое описывается следующим образом. Каждая стрелка является либо *вертикальной*, либо *горизонтальной*. Для любой пары индексов $i \in [1, k - 1]$ и $j \in [1, n]$ имеется одна вертикальная стрелка $\mathbf{v}_{i,j} = \langle (i, j) \rightarrow (i + 1, j) \rangle$, ведущая из вершины (i, j) вниз в вершину $(i + 1, j)$. Для любой пары индексов $i \in [1, k]$ и $j \in [1, n - 1]$ имеется горизонтальная стрелка $\mathbf{h}_{i,j} = \langle (i, j) \rightarrow (i, j + 1) \rangle$, ведущая из вершины (i, j) направо в вершину $(i, j + 1)$. К ним мы также добавляем одну дополнительную вертикальную стрелку $\mathbf{v}_{0,1} = \langle (0, 1) \rightarrow (1, 1) \rangle$ и одну дополнительную горизонтальную стрелку $\mathbf{h}_{k,n} = \langle (k, n) \rightarrow (k, n + 1) \rangle$. Пример такого колчана изображен на рисунке 2.

Для каждой стрелки

$$\alpha = \langle (i, j) \rightarrow (i', j') \rangle \in \text{Ar}(\mathbb{Q})$$

мы называем ее началом $t(\alpha)$ и концом $h(\alpha)$ вершины (i, j) и (i', j') , соответственно.

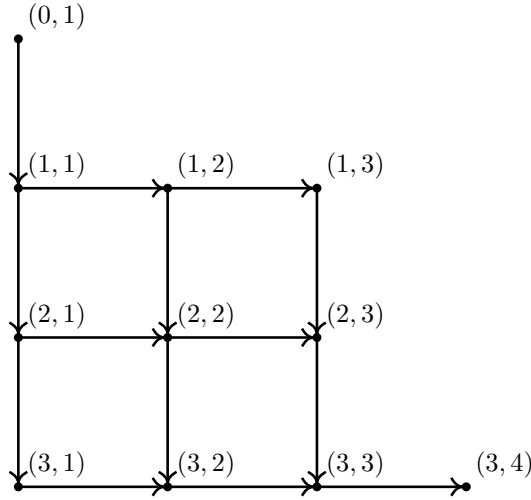


Рис. 2. Колчан \mathbb{Q} для грассманиана $\text{Gr}(3, 6)$

Для пары чисел $r, s \in [0, k]$, $r < s$, мы определяем *горизонтальный блок* $\text{HB}(r, s)$ как множество всех вертикальных стрелок $\mathbf{v}_{i,j}$ с $i \in [r, s - 1]$. Например, горизонтальный блок $\text{HB}(0, 1)$ состоит из единственной стрелки $\mathbf{v}_{0,1}$, а горизонтальный блок $\text{HB}(1, 3)$ состоит из всех стрелок $\mathbf{v}_{1,j}$ и $\mathbf{v}_{2,j}$, $j \in [1, n]$. Аналогично, для пары чисел $r, s \in [1, n + 1]$, $r < s$, мы определяем *вертикальный блок* $\text{VB}(r, s)$ как множество всех горизонтальных стрелок $\mathbf{h}_{i,j}$ с $j \in [r, s - 1]$. Наконец, для $r \in [0, k]$, $s \in [1, n + 1]$ мы определяем *смешанный блок* $\text{MB}(r, s) = \text{HB}(r, k) \cup \text{VB}(1, s)$. Например, смешанный блок $\text{MB}(0, n)$ состоит из всех стрелок $\text{Ar}(\mathbb{Q})$, кроме $\mathbf{h}_{k,n}$. Когда мы говорим про блок, мы имеем в виду либо горизонтальный, либо вертикальный, либо смешанный блок. *Размером* горизонтального блока $\text{HB}(r, s)$ или вертикального блока $\text{VB}(r, s)$ называется число $s - r$, а размером смешанного блока $\text{MB}(r, s)$ называется число $s + k - r$.

Зафиксируем блоки B_1, \dots, B_l . Будем говорить, что эти блоки *последовательные*, если стрелка $\mathbf{v}_{0,1}$ содержится в B_1 , и для каждого номера $p \in [1, l]$ объединение $B_1 \cup \dots \cup B_p$ является блоком. Это возможно в одной из двух

следующих ситуаций: либо существует такой индекс $p_0 \in [1, l]$ и последовательности целых чисел $0 < r_1 < \dots < r_{p_0} = k$ и $0 < r'_1 < \dots < r'_{l-p_0} \leq n + 1$, для которых

$$B_1 = \text{HB}(0, r_1), B_2 = \text{HB}(r_1, r_2), \dots, B_{p_0} = \text{HB}(r_{p_0-1}, r_{p_0}),$$

$$B_{p_0+1} = \text{VB}(0, r'_1), \dots, B_l = \text{VB}(r'_{l-p_0-1}, r'_{l-p_0}),$$

либо существует такой индекс $p_0 \in [1, l]$ и последовательности целых чисел $0 < r_1 < \dots < r_{p_0-1} < k$ и $0 < r'_1 < \dots < r'_{l-p_0-1} \leq n + 1$, для которых

$$B_1 = \text{HB}(0, r_1), B_2 = \text{HB}(r_1, r_2), \dots, B_{p_0-1} = \text{HB}(r_{p_0-2}, r_{p_0-1}),$$

$$B_{p_0} = \text{MB}(r_{p_0}, r'_1), B_{p_0+1} = \text{VB}(r'_1, r'_2), \dots, B_l = \text{VB}(r'_{l-p_0-2}, r'_{l-p_0-1}).$$

Первый случай возникает тогда, когда среди блоков B_1, \dots, B_l нет смешанных блоков, а второй — тогда, когда один из этих блоков смешанный.

Пусть $S = \{x_1, \dots, x_N\}$ — конечное множество. Мы будем обозначать тор $\mathbb{T}[x_1, \dots, x_N] \cong (\mathbb{C}^*)^N$ символом $\mathbb{T}(S)$. Заметим, что переменные x_1, \dots, x_N можно интерпретировать как координаты на $\mathbb{T}(S)$.

Зафиксируем множество переменных $\tilde{V} = \{\tilde{a}_{i,j} \mid i \in [1, k], j \in [1, n]\}$. Удобно считать, что переменная $\tilde{a}_{i,j}$ соответствует вершине (i, j) колчана \mathbb{Q} . Многочлены Лорана от переменных $\tilde{a}_{i,j}$ являются регулярными функциями на торе $\mathbb{T}(\tilde{V})$. Мы полагаем $\tilde{a}_{0,1} = \tilde{a}_{k,n+1} = 1$.

Для каждого подмножества $A \subset \text{Ar}(\mathbb{Q})$ определим регулярную функцию

$$\tilde{F}_A = \sum_{\alpha \in A} \frac{\tilde{a}_{h(\alpha)}}{\tilde{a}_{t(\alpha)}}$$

на торе $\mathbb{T}(\tilde{V})$.

Пусть Y — полное пересечение гиперповерхностей степеней d_1, \dots, d_l в грассманиане $\text{Gr}(k, n + k)$, $\sum d_i < n + k$. Зафиксируем последовательные блоки B_1, \dots, B_l размеров d_1, \dots, d_l , соответственно, и положим

$$B_0 = \text{Ar}(\mathbb{Q}) \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_l).$$

Рассмотрим подмногообразие $\tilde{L} \subset \mathbb{T}(\tilde{V})$, заданное уравнениями

$$\tilde{F}_{B_1} = \dots = \tilde{F}_{B_l} = 1.$$

В работах [BCFKS97] и [BCFKS98] было предположено, что моделью Ландау–Гинзбурга для Y является многообразие \tilde{L} с суперпотенциалом \tilde{F}_{B_0} . Мы будем называть ее моделью типа BCFKS.

Основным результатом этой части является следующий.

Теорема 6.1. *Многообразие \tilde{L} бирационально эквивалентно тору $\mathcal{Y} \cong (\mathbb{C}^*)^{nk-l}$, причем бирациональная эквивалентность $\tilde{\tau}: \mathcal{Y} \dashrightarrow \tilde{L}$ может быть выбрана так, что функция $\tilde{\tau}^*(\tilde{F}_{B_0})$ является регулярной на \mathcal{Y} . В частности, эта функция задается многочленом Лорана.*

Замечание 6.2. Многочлен Лорана, существование которого утверждает теорема 6.1, может существенно зависеть от упорядочения степеней d_1, \dots, d_l (ср. примеры 6.15 и 6.17).

Для доказательства теоремы 6.1 мы будем использовать немного более удобные координаты, чем $\tilde{a}_{i,j}$. А именно, сделаем мономиальную замену координат $\psi: \mathbb{T}(V) \rightarrow \mathbb{T}(V)$, заданную формулами

$$(6.3) \quad a_{i,j} = \tilde{a}_{i,j} \cdot \tilde{a}_{k,n}, \quad a = \tilde{a}_{k,n}.$$

Положим

$$V = \{a_{i,j} \mid i \in [1, k], j \in [1, n], (i, j) \neq (k, n)\} \cup \{a\}.$$

Кроме того, для большего удобства мы иногда будем использовать обозначения $a_{k,n} = 1$ и $a_{0,1} = a_{k,n+1} = a$. Как и выше, для каждого подмножества $A \subset \text{Ar}(\mathbb{Q})$ определим регулярную функцию

$$F_A = \sum_{\alpha \in A} \frac{a_{h(\alpha)}}{a_{t(\alpha)}}$$

на торе $\mathbb{T}(V)$. Пусть подмногообразие $L \subset \mathbb{T}(V)$ задано уравнениями

$$F_{B_1} = \dots = F_{B_l} = 1.$$

Мы проверим, что многообразие L бирационально эквивалентно тору $\mathcal{Y} \cong (\mathbb{C}^*)^{nk-l}$, и бирациональная эквивалентность $\tau: \mathcal{Y} \dashrightarrow L$ может быть выбрана так, что обратный образ функции F_{B_0} является регулярной функцией на \mathcal{Y} . Очевидно, что это утверждение равносильно теореме 6.1.

Следующее утверждение хорошо известно и легко проверяется.

Лемма 6.4. Пусть на многообразии \mathcal{X} свободно действует тора T . Положим $\mathcal{Y} = \mathcal{X}/T$ и рассмотрим естественную проекцию $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Предположим, что φ имеет сечение $\sigma: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$. Тогда имеется изоморфизм

$$\xi: \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} T \times \mathcal{Y}.$$

Предположим, что функция $F \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ полуинвариантна относительно действия тора T , то есть существует характер χ тора T , для которого при всех $x \in \mathcal{X}$ и $t \in T$ выполнено $F(tx) = \chi(t)F(x)$. Тогда существует функция $\bar{F} \in H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$, для которой выполнено равенство $F = \xi^*(\chi \cdot \bar{F})$.

Напомним, что блоки B_1, \dots, B_l являются последовательными. В частности, стрелка $\mathbf{v}_{0,1}$ содержится в блоке B_1 .

Теперь мы припишем веса $\text{wt}_1, \dots, \text{wt}_l$ вершинам колчана \mathbb{Q} , причем будет выполнено следующее свойство. Рассмотрим стрелку $\alpha \in \text{Ar}(\mathbb{Q})$. Тогда

$$\text{wt}_p(h(\alpha)) - \text{wt}_p(t(\alpha)) \begin{cases} -1 & \text{если } \alpha \in B_p, \\ 0 & \text{если } \alpha \notin B_p \text{ и } \alpha \neq \mathbf{h}_{k,n}. \end{cases}$$

Кроме того, при всех $p \in [1, l]$ мы потребуем выполнения следующих свойств:

- для всех (i, j) выполнено неравенство $\text{wt}_p(i, j) \geq 0$;

- выполнено равенство $\text{wt}_p(k, n) = 0$, и в частности

$$\text{wt}_p(k, n + 1) - \text{wt}_p(k, n) = \text{wt}_p(k, n + 1) \geq 0;$$

- выполнено равенство $\text{wt}_p(0, 1) = \text{wt}_p(k, n + 1)$.

Нетрудно заметить, что веса однозначно определяются перечисленными выше свойствами. Зафиксируем индекс $p \in [1, l]$. Если $B_p = \text{НВ}(r, s)$ является горизонтальным блоком, положим

$$\text{wt}_p(i, j) \begin{cases} s - i, & \text{при } i \in [r, s], j \in [1, n], \\ 0, & \text{при } i \in [s + 1, k], j \in [1, n], \\ s - r, & \text{при } i \in [1, r - 1], j \in [1, n], \text{ или } (i, j) = (0, 1). \end{cases}$$

В частности, это дает $\text{wt}_p(0, 1) = s - r$. Если $B_p = \text{МВ}(r, s)$ является смешанным блоком, положим

$$\text{wt}_p(i, j) \begin{cases} (k - i) + (s - j), & \text{при } i \in [r, k], j \in [1, s], \\ k - i, & \text{при } i \in [r, k], j \in [s + 1, n], \\ (k - r) + (s - j), & \text{при } i \in [1, r - 1], j \in [1, s], \text{ или } (i, j) = (0, 1), \\ k - r, & \text{при } i \in [1, r - 1], j \in [s + 1, n]. \end{cases}$$

Если $B_p = \text{ВВ}(r, s)$ является вертикальным блоком, положим

$$\text{wt}_p(i, j) \begin{cases} s - j, & \text{при } i \in [1, k], j \in [r, s], \\ s - r, & \text{при } i \in [1, k], j \in [1, r - 1], \text{ или } (i, j) = (0, 1), \\ 0, & \text{при } i \in [1, k], j \in [s + 1, n]. \end{cases}$$

Наконец, мы всегда полагаем $\text{wt}_p(k, n + 1) = \text{wt}_p(0, 1)$.

Пример весов для грассманиана $\text{Gr}(3, 6)$ и смешанного блока $B = \text{МВ}(2, 2)$ дан на рисунке 3. Сплошные стрелки содержатся в блоке B , а пунктирные не содержатся. Весовая вершина $(3, 1)$ блока B помечена белым кружком.

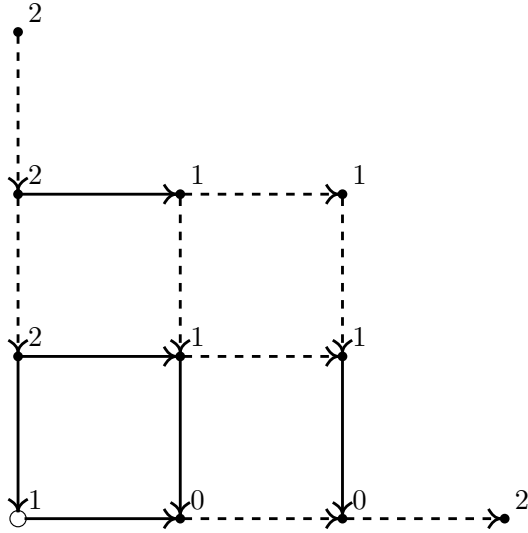


РИС. 3. Веса для грассманиана $\text{Gr}(3, 6)$ и смешанного блока $\text{MB}(2, 2)$

Каждому блоку B мы сопоставляем *весовую вершину* колчана \mathbb{Q} по следующему правилу. Если $B = \text{HB}(r, s)$ является горизонтальным блоком, то его весовая вершина есть $(s - 1, 1)$. Если B является смешанным блоком $\text{MB}(r, s)$ или вертикальным блоком $\text{VB}(r, s)$, то его весовая вершина есть $(k, s - 1)$. Пусть B — блок, а (i, j) — его весовая вершина; *весовой переменной* блока B мы называем переменную $a_{i,j}$, если $(i, j) \neq (0, 1)$, и переменную a в противном случае.

Пример 6.5. Рассмотрим колчан \mathbb{Q} , соответствующий грассманиану $\text{Gr}(3, 6)$ (см. рисунок 2). Предположим, что $l = 4$, $B_1 = \text{HB}(0, 1)$, $B_2 = \text{HB}(1, 2)$, $B_3 = \text{MB}(2, 2)$ и $B_4 = \text{VB}(2, 3)$. Тогда весовые вершины блоков B_1 , B_2 , B_3 и B_4 — это вершины $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(3, 1)$ и $(3, 2)$, соответственно, а весовые переменные — это переменные a , $a_{1,1}$, $a_{3,1}$ и $a_{3,2}$.

Рассмотрим тор

$$\mathcal{X} = \mathbb{T}(V) \cong (\mathbb{C}^*)^{nk},$$

а также тор $T \cong (\mathbb{C}^*)^l$ с координатами w_1, \dots, w_l . Определим действие тора T на \mathcal{X} , полагая

$$(w_1, \dots, w_l) \cdot a_{i,j} = w_1^{\text{wt}_1(i,j)} \cdot \dots \cdot w_l^{\text{wt}_l(i,j)} \cdot a_{i,j}$$

при $i \in [1, k]$, $j \in [1, n]$, $(i, j) \neq (k, n)$, и

$$(w_1, \dots, w_l) \cdot a = w_1^{\text{wt}_1(0,1)} \cdot \dots \cdot w_l^{\text{wt}_l(0,1)} \cdot a.$$

Из определения весов вытекает следующая лемма.

Лемма 6.6. *Пусть $p \in [1, l]$. Тогда функция F_{B_p} является полуинвариантной на \mathcal{X} относительно действия тора T с весом w_p^{-1} .*

Напомним, что

$$B_0 = \text{Ar}(\mathbb{Q}) \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_l).$$

Положим $A = B_0 \setminus \{\mathbf{h}_{k,n}\}$. Заметим, что $F_{B_0} = F_A + a$.

Лемма 6.7. *Функция F_A инвариантна относительно действия тора T . Функция a полуинвариантна относительно действия T с весом*

$$\mu(w) = w_1^{d_1} \cdot \dots \cdot w_l^{d_l}.$$

Рассмотрим фактор $\mathcal{Y} = \mathcal{X}/T$ и естественную проекцию $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Пусть x_1, \dots, x_l — весовые переменные блоков B_1, \dots, B_l соответственно. Пусть подмногообразие $\Sigma \subset \mathcal{X}$ задано уравнениями

$$\{x_i = 1 \mid i \in [1, l]\} \subset \mathcal{X}.$$

Заметим, что тор T действует на координату x_i , домножая ее на $w_i \cdot N_i$, где N_i — моном от w_{i+1}, \dots, w_l . Другими словами, определим матрицу M соотношением

$$(w_1, \dots, w_l) \cdot x_i = \prod w_j^{M_{i,j}} x_i.$$

Тогда M является целочисленной верхнетреугольной матрицей с единицами на диагонали. Следовательно Σ имеет единственную общую точку с каждым слоем проекции φ . Таким образом, существует сечение $\sigma: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ проекции φ , образом которого является подмногообразие Σ . Кроме того, мы видим, что действие тора T на \mathcal{X} свободно. Теперь из леммы 6.4 следует, что $\mathcal{X} \cong T \times \mathcal{Y}$. В частности, $\mathcal{Y} \cong (\mathbb{C}^*)^{nk-l}$.

Обозначим через V' множество переменных, которое получается из множества V исключением весовых переменных x_1, \dots, x_l . Мы считаем переменные из V координатами на торе \mathcal{X} , а переменные из V' координатами на торе $\mathcal{Y} \cong \mathbb{T}(V')$. В этих координатах морфизм σ задается совсем просто: точку $y \in \mathcal{Y}$ он переводит в точку $\sigma(y)$, все весовые координаты которой равны 1, а остальные координаты равны соответствующим координатам точки y .

Пример 6.8. В обозначениях примера 6.5 имеем

$$\mathcal{X} = \mathbb{T}(\{a, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,1}, a_{3,2}\})$$

и

$$\mathcal{Y} = \mathbb{T}(\{a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}\}).$$

Действие тора $T \cong (\mathbb{C}^*)^4$ задано матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Другими словами, при этом действии

$$\begin{aligned} (w_1, w_2, w_3, w_4) : (a, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,1}, a_{3,2}) &\mapsto \\ &\mapsto (w_1 w_2 w_3^2 w_4 \cdot a, w_2 w_3^2 w_4 \cdot a_{1,1}, w_2 w_3 w_4 \cdot a_{1,2}, w_2 w_3 \cdot a_{1,3}, \\ &w_3^2 w_4 \cdot a_{2,1}, w_3 w_4 \cdot a_{2,2}, w_3 \cdot a_{2,3}, w_3 w_4 \cdot a_{3,1}, w_4 \cdot a_{3,2}). \end{aligned}$$

(Отметим, что веса, соответствующие блоку B_3 , перечислены на рисунке 3.)

Матрица

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

дает $w_1^{-1} = \frac{a}{a_{1,1}}$, $w_2^{-1} = \frac{a_{1,1}a_{3,2}}{a_{3,1}^2}$, $w_3^{-1} = \frac{a_{3,1}}{a_{3,2}}$ и $w_4^{-1} = a_{3,2}$, то есть проекция $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ задается формулой

$$\begin{aligned} \varphi: (a, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,1}, a_{3,2}) &\mapsto \\ &\mapsto \left(\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}a_{3,2}} \cdot a_{1,2}, \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \cdot a_{1,3}, \frac{a_{3,2}}{a_{3,1}^2} \cdot a_{2,1}, \frac{1}{a_{3,1}} \cdot a_{2,2}, \frac{a_{3,2}}{a_{3,1}} \cdot a_{2,3} \right), \end{aligned}$$

а сечение $\sigma: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ задается формулой

$$\sigma: (a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}) \mapsto (1, 1, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, 1, 1).$$

Применяя леммы 6.6 и 6.4, мы получаем регулярные функции \bar{F}_p , $p \in [1, l]$, на \mathcal{Y} , для которых при отождествлении $\mathcal{X} \cong T \times \mathcal{Y}$ выполнено равенство

$$F_p = w_p^{-1} \cdot \varphi^* \bar{F}_p.$$

Аналогично, применяя леммы 6.7 и 6.4, мы получаем регулярные функции \bar{F}_A и \bar{a} на \mathcal{Y} , для которых $F_A = \varphi^* \bar{F}_A$ и $a = \mu(w) \varphi^* \bar{a}$.

Рассмотрим рациональное отображение

$$y \mapsto (\bar{F}_1(y), \dots, \bar{F}_l(y))$$

из \mathcal{Y} в T . Определим рациональное отображение $\tau: \mathcal{Y} \dashrightarrow \mathcal{X}$ формулой

$$y \mapsto (\bar{F}_1(y), \dots, \bar{F}_l(y)) \cdot \sigma(y).$$

Легко видеть, что замыкание образа тора \mathcal{Y} при отображении τ совпадает с подмногообразием $L \subset \mathcal{X}$. В частности, τ задает бирациональную эквивалентность между \mathcal{Y} и L .

Теперь остается заметить, что

$$\tau^* F_A = \tau^* \varphi^* \bar{F}_A = \bar{F}_A.$$

С другой стороны,

$$\tau^* a \mu(\bar{F}_1(y), \dots, \bar{F}_l(y)) \sigma^* \varphi^* \bar{a} = \mu(\bar{F}_1(y), \dots, \bar{F}_l(y)) \bar{a}.$$

Это значит, что отображение $\tilde{\tau} = \tau \varphi \psi$, где ψ определяется формулами (6.3), задает бирациональную эквивалентность, существование которой и утверждает теорема 6.1.

Замечание 6.9. Приведенное выше доказательство теоремы 6.1 дает явное выражение для многочлена Лорана $\tau^* F_{B_0}$. А именно, рассмотрим полное пересечение $Y \subset \text{Gr}(n, n+k)$ гиперповерхностей степеней d_i , $i \in [1, l]$. Возможны следующие случаи.

- Выполнено неравенство $d_1 + \dots + d_l \leq k$. Положим $u_i = d_1 + \dots + d_i$ при $i \in [1, l]$. Тогда модель Ландау–Гинзбурга типа VCFKS для Y бирациональна эквивалентна тору $(\mathbb{C}^*)^{nk-l}$ с суперпотенциалом

$$\begin{aligned} & \sum_{i=u_l+1}^k \sum_{j=1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i-1,j}} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=2}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,j-1}} + \\ & + a \left(\frac{a_{1,1}}{a} + \sum_{i=2}^{d_1} \sum_{j=1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i-1,j}} \right)^{d_1} \prod_{p=2}^l \left(\sum_{i=u_{p-1}}^{u_p} \sum_{j=1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i-1,j}} \right)^{d_p}, \end{aligned}$$

где $a_{1,u_1-1} = 1$ при $u_1 > 1$ и $a = 1$ при $u_1 = 1$, $a_{1,u_i-1} = 1$ при $i \in [2, l]$ и $a_{k,n} = 1$.

- Выполнено неравенство $d_1 + \dots + d_l > k$. Пусть $m \in [0, l-1]$ является максимальным индексом, для которого $d_1 + \dots + d_m \leq k$. Положим $u_i = d_1 + \dots + d_i$ при $i \in [1, m]$, и положим $u_i = d_1 + \dots + d_i - k$ при $i \in [m+1, l]$.

Если $m = 0$, то модель Ландау–Гинзбурга типа VCFKS для Y бирационально эквивалентна тору $(\mathbb{C}^*)^{nk-l}$ с суперпотенциалом

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=u_l+1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,j-1}} + a \left(\frac{a_{1,1}}{a} + \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i-1,j}} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=2}^{u_1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,j-1}} \right)^{d_1} \cdot \prod_{p=2}^l \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=u_{p-1}}^{u_p} \frac{a_{i,j}}{a_{i,j-1}} \right)^{d_p}.$$

Если $m > 1$, то модель Ландау–Гинзбурга типа VCFKS для Y бирационально эквивалентна тору $(\mathbb{C}^*)^{nk-l}$ с суперпотенциалом

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=u_l+1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,j-1}} + a \left(\frac{a_{1,1}}{a} + \sum_{i=2}^{d_1} \sum_{j=1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i-1,j}} \right)^{d_1} \cdot \prod_{p=2}^m \left(\sum_{i=u_{p-1}}^{u_p} \sum_{j=1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i-1,j}} \right)^{d_p} \cdot \left(\sum_{i=u_m}^k \sum_{j=1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i-1,j}} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=2}^{u_{m+1}} \frac{a_{i,j}}{a_{i,j-1}} \right)^{d_{m+1}} \cdot \prod_{p=m+2}^l \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=u_{p-1}}^{u_p} \frac{a_{i,j}}{a_{i,j-1}} \right)^{d_p},$$

В обоих случаях мы полагаем $a_{1,u_1-1} = 1$ при $u_1 > 1$ и $a = 1$ при $u_1 = 1$, $a_{1,u_p-1} = 1$ при $p \in [2, m]$, $a_{k,u_p-1} = 1$ при $p \in [m+1, l]$ и $a_{k,n} = 1$.

Пример 6.10. Рассмотрим гладкое четырехмерное многообразие Фано Y индекса 2, являющееся пересечением грассманиана $\text{Gr}(2, 6)$ с четырьмя гиперплоскостями. Многочлен Лорана

$$f_Y = \frac{(a_4 + a_3) \cdot (a_4 + a_3 + a_2)}{a_3 \cdot a_2 \cdot a_1} + \frac{a_4 + a_3}{a_3 \cdot a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$$

задает слабую модель ЛГ для Y . Положим $\mathbb{T} = \mathbb{T}[a_1, a_2, a_3, a_4] \cong (\mathbb{C}^*)^4$. Рассмотрим относительную компактификацию семейства $f_Y: T \rightarrow \mathbb{A}^1$, заданную вложением тора \mathbb{T} в проективное пространство \mathbb{P}^4 с однородными координатами a_0, \dots, a_4 . Это семейство особых компактных трехмерных многообразий

Калаби–Яу. Его тотальное пространство имеет крепантное разрешение LG_Y . Можно проверить, что LG_Y является семейством трехмерных многообразий Калаби–Яу с гладким общим слоем и 12 особыми слоями. Каждый из них имеет единственную особую точку, и она является обыкновенной двойной особенностью. Согласно компактификационному принципу 2.8, мы ожидаем, что LG_Y удовлетворяет гипотезе гомологической зеркальной симметрии. Структура особых слоев для LG_Y подтверждает это ожидание. А именно, по [Kuz06, Corollary 10.3], на Y есть полный исключительный набор длины 12. С другой стороны, по гипотезе гомологической зеркальной симметрии категория $D^b(\text{coh } Y)$ эквивалентна категории Фукаи–Зайделя двойственной модели Ландау–Гинзбурга.

6.2. ПЕРИОДЫ

В этом параграфе мы обсудим интегралы периодов для многочленов Лорана, полученных в теореме 6.1.

Напомним определение интеграла Гивенталья для нашего случая.

Назовем цикл $\{|x_i| = \varepsilon_i \mid i \in [1, r]\}$ на торе $\mathbb{T}(\{x_1, \dots, x_r\})$, зависящий от нескольких вещественных чисел ε_i *стандартным*.

Определение 6.11 (см. [BCFKS97]). (*Антиканоническим*) *интегралом Гивенталья* для Y называется интеграл

$$I_Y^0 = \int_{\delta} \frac{\Omega(\{\tilde{a}_{i,j}\})}{\prod_{j=1}^l (1 - \tilde{F}_j) \cdot (1 - t\tilde{F}_0)} \in \mathbb{C}[[t]]$$

по стандартному циклу $\delta = \{|\tilde{a}_{i,j}| = \varepsilon_{i,j} \mid i \in [1, k], j \in [1, n], \varepsilon_{i,j} \in \mathbb{R}_+\}$, ориентация на котором выбрана так, что $I_Y^0|_{t=0} = 1$.

В [BCFKS97, Conjecture 5.2.3] утверждалось, что $\tilde{I}_0^G = I_G^0$, и была приведена формула для \tilde{I}_0^G . Эта гипотеза была доказана для случая $n = 2$ в [BCFK03, Proposition 3.5] и для случая любого $n \geq 2$ в [MR13]. В обсуждении после гипотезы 5.2.1 в [BCFKS98] было объяснено, что из приведенных

выше теорем и из квантовой теоремы Лефшеца следует, что интеграл Гивенталя I_Y^0 равен интегралу \tilde{I}_0^Y . Сформулируем упомянутые выше результаты следующим образом.

Теорема 6.12. *Рассмотрим полное пересечение Фано $Y = Y_1 \cap \dots \cap Y_l$ в $\text{Gr}(n, k+n)$. Обозначим $d_i = \deg Y_i$ и $d_0 = k+n - \sum d_i$. Тогда выполнено равенство*

$$\tilde{I}_0^Y = I_Y^0 = \sum_{d \geq 0} \sum_{s_{i,j} \geq 0} \frac{\prod_{i=0}^l (d_i d)!}{(d!)^{k+n}} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{n-1} \binom{s_{i+1,j}}{s_{i,j}} \binom{s_{i,j+1}}{s_{i,j}} t^{d_0 d},$$

в котором $s_{k,j} = s_{i,n} = d$.

Оказывается, что замены переменных, построенные в теореме 6.1, сохраняют этот период.

Предложение 6.13. *Условие периодов выполнено для многочленов Лорана, получающихся с помощью теоремы 6.1. Другими словами, теорема 6.1 дает слабые модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений Фано в грассманианах.*

Доказательство. Будем следовать обозначениям из теоремы 6.1. Торическая замена координат $\varphi\psi$ меняет координаты $\{\tilde{a}_{i,j}\}$ на координаты $\{w_i\} \cup V'$.

Имеем:

$$I_Y^0 = \int_{\delta} \frac{\Omega(\{\tilde{a}_{i,j}\})}{\prod_{j=1}^l (1 - \tilde{F}_j) \cdot (1 - t\tilde{F}_0)} = \int_{\delta'} \Omega(V') \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^l \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{dw_j}{w_j \cdot (1 - \bar{F}_j/w_j)} \right) \right) \cdot \frac{1}{1 - t\bar{F}}$$

для подходящего выбора ориентации на цикле δ' , где $\bar{F} = \bar{F}_A + \mu(w) \cdot \bar{a}$. Следуя бирациональному изоморфизму τ , рассмотрим переменные $u_i = w_i - \bar{F}_i$

вместо переменных w_i . Тогда, после подходящего выбора цикла Δ' , получим

$$I_Y^0 \int_{\delta'} \Omega(V') \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^l \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{dw_j}{w_j - \bar{F}_j} \right) \right) \cdot \frac{1}{1 - t\bar{F}} = \\ \int_{\Delta'} \Omega(V') \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^l \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{du_j}{u_j} \right) \right) \cdot \frac{1}{1 - tF_u} \int_{\Delta} \frac{\Omega(V')}{1 - tf} = \sum [f^i] t^i,$$

где цикл Δ является проекцией цикла Δ' на $\mathbb{T}(V)$, а многочлен F_u является результатом замены переменных w_i на выражения $u_i + F_{B_i}$ в функции \bar{F} . \square

Проблема 6.14. Рассмотрим полное пересечение Фано Y в грассманиане $\text{Gr}(n, k + n)$. Пусть f_Y — многочлен Лорана для Y , полученный с помощью теоремы 6.1. Доказать, что многочлен f_Y является торической моделью Ландау–Гинзбурга. Доказать, что число компонент центрального слоя компактификации Калаби–Яу для многочлена f_Y равно $h^{1, \dim Y - 1}(Y) + 1$ (см. часть 7).

Пример 6.15. Пусть Y — гладкое пересечение грассманиана $\text{Gr}(3, 6)$ с квадратикой и тремя гиперплоскостями. Положим $l = 4$, $d_1 = d_2 = d_4 = 1$ и $d_3 = 2$. Модель Ландау–Гинзбурга типа VCFKS в этом случае бирационально эквивалентна тору

$$\mathcal{Y} \cong \mathbb{T}(\{a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}\})$$

с суперпотенциалом

$$f_Y = \left(a_{2,1} + \frac{a_{2,2}}{a_{1,2}} + \frac{a_{2,3}}{a_{1,3}} \right) \cdot \left(\frac{1}{a_{2,1}} + \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} + \frac{1}{a_{2,3}} + a_{1,2} + \frac{a_{2,2}}{a_{2,1}} + 1 \right)^2 \cdot \left(\frac{a_{1,3}}{a_{1,2}} + \frac{a_{2,3}}{a_{2,2}} + 1 \right),$$

полученным с помощью замечания 6.9. Согласно теореме 6.12 (см. также [BCFKS97, пример 5.2.2]),

$$\begin{aligned}
(6.16) \quad I_Y^0 &= \sum_{d, b_1, b_2, b_3, b_4} \frac{(2d)!}{(d!)^2} \binom{b_2}{b_1} \binom{b_3}{b_1} \binom{d}{b_2} \binom{b_4}{b_2} \binom{b_4}{b_3} \binom{d}{b_3} \binom{d}{b_4}^2 t^d = \\
&= 1 + 12t + 756t^2 + 78960t^3 + 10451700t^4 + 1587790512t^5 + 263964176784t^6 + \\
&\quad + 46763681545152t^7 + 8685492699286260t^8 + \dots
\end{aligned}$$

Можно проверить, что первые несколько членов, выписанных в правой части равенства (6.16), совпадают с первыми несколькими членами ряда $\sum [f_Y^i] t^i$.

Пример 6.17. Пусть Y — гладкое пересечение грассманиана $\text{Gr}(3, 6)$ с квадратом и тремя гиперплоскостями, то есть многообразие, рассмотренное в примере 6.15.

Положим $l = 4$, $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ и $d_4 = 2$. Имеем

$$\mathcal{Y} = \mathbb{T}(\{a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,1}\}).$$

Согласно замечанию 6.9, получим

$$\begin{aligned}
f_Y &= \left(1 + \frac{a_{2,2}}{a_{1,2}} + \frac{a_{2,3}}{a_{1,3}}\right) \cdot \left(a_{3,1} + \frac{1}{a_{2,2}} + \frac{1}{a_{2,3}}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(a_{1,2} + a_{2,2} + \frac{1}{a_{3,1}} + \frac{a_{1,3}}{a_{1,2}} + \frac{a_{2,3}}{a_{2,2}} + 1\right)^2.
\end{aligned}$$

Можно проверить, что первые несколько свободных членов $[f_Y^i]$ совпадают с первыми несколькими коэффициентами разложения ряда, выписанного с правой стороны равенства (6.16). Заметим, что многочлен Лорана f_Y не может быть получен из многочлена из примера 6.15 мономиальной заменой переменных (см. замечание 6.2). Было бы интересно установить, что эти два многочлена мутационно эквивалентны (ср. [DH15, Theorem 2.24]).

Часть 7. Числа Ходжа

Гипотеза 3.29 связывает геометрию вручную компактифицированных моделей Ландау–Гинзбурга с числами Ходжа соответствующих им многообразий Фано. Основным объектом, связанным с этими гипотезами, был слой над бесконечностью для этих моделей. В этой части мы обсудим гипотезу, связывающую простейшие численные инварианты (конечных) слоев моделей Ландау–Гинзбурга с одним, крайним средним числом Ходжа. А именно, мы изучим следующую гипотезу.

Рассмотрим гладкое многообразие Фано X размерности N , и пусть LG_X — его N -мерная модель Ландау–Гинзбурга. Определим число k_{LG_X} как разность числа неприводимых компонент приводимых слоев для LG_X и числа самих приводимых слоев.

Гипотеза 7.1 (ср. [GKR12]). *Для гладкого многообразия Фано X размерности $N \geq 3$ выполнено $h^{1,N-1}(X) = k_{LG_X}$.*

Согласно [GKR12], эту гипотезу можно объяснить (по крайней мере для полных пересечений) следующим образом. Рассмотрим превратный пучок \mathcal{F} циклов, исчезающих к центральному слою слабой модели Ландау–Гинзбурга f . Если для ее послойной компактификации выполнена гипотеза гомологической зеркальной симметрии, то k_X можно вычислить с помощью спектральной последовательности из [GKR12] для $H^1(\mathcal{F})$ и $H^N(\mathcal{F})$. Следовательно, согласно [GKR12], $H^1(\mathcal{F})$ и $H^N(\mathcal{F})$ изоморфны $H^{1,N-1}(X)$ и $H^{N-1,1}(X)$ как структуры Ходжа.

Мы изучим гипотезу 7.1 для компактификаций Калаби–Яу некоторых торических моделей Ландау–Гинзбурга, а именно для случая трехмерных многообразий Фано основной серии и для полных пересечений. Заметим, что бирациональные гладкие многообразия Калаби–Яу изоморфны в коразмерности 1, так что число k_{LG_X} не зависит от конкретной компактификации

Калаби–Яу LG_X торической модели Ландау–Гинзбурга для X . Кроме того, в трехмерном случае оно, согласно следствию 4.28, не зависит и от торической модели, если выполнено условие Долгачева–Никулина.

Теорема 7.2. Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано основной серии. Пусть $f: (\mathbb{C}^*)^3 \rightarrow \mathbb{C}$ — его торическая модель Ландау–Гинзбурга, удовлетворяющая условию Долгачева–Никулина. Пусть $k_f - 1$ — число неприводимых компонент центрального слоя компактификации Калаби–Яу многочлена f . Тогда $k_f = h^{12}(X)$.

Доказательство. Рассмотрим их торические модели Ландау–Гинзбурга из таблицы 1. Заметим, что согласно параграфу 4.4, они удовлетворяют условию Долгачева–Никулина. Пусть X — полное пересечение во взвешенном проективном пространстве. Утверждение теоремы следует из теоремы 7.24 или вычислений для ее прямого обобщения на взвешенные проективные пространства. Для остальных многообразий доказательство получается прямыми вычислениями компактификаций Калаби–Яу из предложения 4.11. \square

Замечание 7.3. Так как X — трехмерное многообразие Фано и $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, его ромб Ходжа следующий.

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 1 & \\
 & & & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0 \\
 0 & h^{12}(X) & h^{12}(X) & 0 & \\
 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & 0 & 0 & \\
 & & & 1 &
 \end{array}$$

Таким образом, теорема 7.2 позволяет воссоздать все числа Ходжа трехмерных многообразий Фано основной серии.

Согласно теории гомологической зеркальной симметрии, ожидается, что число приводимых слоев трехмерной модели Ландау–Гинзбурга не больше ранга Пикара соответствующего ей многообразия Фано. В частности, из теоремы 7.2 следует, что в случае многообразий Фано основной серии таких слоев не больше одного. Оказывается, важная информация содержится в монодромии в окрестности приводимого слоя. А именно, сравнение работ Исковских [Is77], Голышева [Go07] и построенных нами компактифицированных торических моделей Ландау–Гинзбурга дает следующий результат.

Теорема 7.4. *Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано основной серии, компактифицированная модель Ландау–Гинзбурга для которого содержит слой с неизолированными особенностями. Тогда монодромия (во вторых когомологиях) в окрестности этого слоя унипотентна тогда и только тогда, когда X рационально.*

Перейдем теперь к случаю полных пересечений.

Рассмотрим проективное пространство \mathbb{P}^{N+k} с проективными координатами z_1, \dots, z_{N+k+1} . Пусть f_1, \dots, f_k — однородные многочлены степеней d_1, \dots, d_k от переменных z_1, \dots, z_{N+k+1} . Пусть

$$F = F(f_1, \dots, f_k) = w_1 f_1 + \dots + w_k f_k \in S = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_{N+k+1}, w_1, \dots, w_k].$$

Обозначим идеал S , порожденный функциями

$$\frac{\partial F}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial w_k}, \frac{\partial F}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{N+k+1}}$$

через $J(F)$. Положим

$$R = R(f_1, \dots, f_k) = S/J(F).$$

Градуировки $\deg(z_s) = (0, 1)$ и $\deg(w_j) = (1, -d_j)$ задают на R структуру биградуированного кольца.

Хотя нас будет в первую очередь интересовать кольцо R и его градуированные компоненты, для некоторых вычислений нам понадобится следующее вспомогательное кольцо. Пусть $J'(F) \subset J(F)$ — идеал в S , порожденный элементами

$$\frac{\partial F}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial w_k}.$$

Положим

$$R' = R'(f_1, \dots, f_k) = S/J'(F)$$

и рассмотрим биградуировку на R' , задающуюся через $\deg(z_s) = (0, 1)$ и $\deg(w_j) = (1, -d_j)$. Кольцо R является фактором кольца R' по идеалу $\widehat{J}(F) \subset R'$, порожденному оставшимися частными производными

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_{N+k+1}},$$

а естественный гомоморфизм $R' \rightarrow R$ согласован с градуировкой.

Лемма 7.5. *Если многочлены f_i определяют полное пересечение (как схему), то градуированное векторное пространство R' зависит только от степеней d_i .*

Доказательство. Индукция по k . □

Замечание 7.6. В частности, предположение леммы 7.5 выполнено для набора многочленов $f_1 = z_1^{d_1}, \dots, f_k = z_k^{d_k}$.

Замечание 7.7. Заметим, что прямой аналог леммы 7.5 неверен для кольца R (ср. доказательство леммы 7.10). К примеру, если $k = 1$ и

$$f_1 = z_1^{N+1} + \dots + z_{N+2}^{N+1},$$

то

$$\dim(R_{1,-1}(f_1)) = \binom{2N+1}{N+1} - N - 2,$$

тогда как

$$\dim(R_{1,-1}(z_1^{N+1})) = \binom{2N+1}{N+1} - 1.$$

Будем теперь считать, что многообразии X является гладким полным пересечением Фано гиперповерхностей, заданных многочленами f_i . Пусть $h_{pr}^{N-p,p}(X)$ — примитивные средние числа Ходжа для X . В нашем случае мы имеем

$$h_{pr}^{N-p,p}(X) = h^{N-p,p}(X)$$

для $2p \neq N$ и

$$h_{pr}^{N-p,p}(X) = h^{N-p,p}(X) - 1$$

иначе.

Пусть число

$$i(X) = N + k + 1 - \sum_{t=1}^k d_t \geq 1$$

обозначает индекс многообразия X .

Средние числа Ходжа для X могут быть вычислены через размерности градуированных компонент кольца R .

Теорема 7.8 (см. [Di95], [Gr69], [Na97, Proposition 2.16]). *Выполнено*

$$h_{pr}^{N-p,p}(X) = \dim(R_{p,-i(X)}).$$

Существует и другая (принадлежащая Хирцебруху) формула для чисел Ходжа, см. [Hi66, Theorem 22.1.1] и [SGA7, Exр. XI, Théorème 2.3]. Положим

$$\begin{aligned} H(d) &= \frac{(y+1)^{d-1} - (z+1)^{d-1}}{(z+1)^d y - (y+1)^d z} = \\ &= \frac{d-1 + \binom{d-1}{2}(y+z) + \binom{d-1}{3}(y^2 + yz + z^2) + \dots}{1 - \binom{d}{2}yz - \binom{d}{3}yz(y+z) + \dots} \end{aligned}$$

и

$$H(d_1, \dots, d_c) = \sum_{Q \subset [1,c], Q \neq \emptyset} ((y+1)(z+1))^{|Q|-1} \prod_{i \in Q} H(d_i),$$

где $|Q|$ означает число элементов множества Q . Для формального ряда F от двух переменных y и z определим $F^{(m)}$ как сумму мономов ряда F однородной степени m .

Теорема 7.9. Пусть X гладкое полное пересечение гиперповерхностей степеней d_1, \dots, d_k в \mathbb{P}^{N+k} . Тогда

$$\sum h^{p, N-p}(X) y^p z^{N-p} = \left(H(d_1, \dots, d_k) + \delta y^{\frac{N}{2}} z^{\frac{N}{2}} \right)^{(N)},$$

где $\delta = 1$, если N четно, и $\delta = 0$, если N нечетно.

Теорема 7.8 позволяет получить явную формулу для среднего числа Ходжа $h_{pr}^{1, N-1}(X)$.

Лемма 7.10. Пусть $i(X) \geq 2$. Тогда

$$\dim(R_{1, -i(X)}) = \dim(R'_{1, -i(X)}).$$

Более того, если $i(X) = 1$, то

$$\dim(R_{1, -1}) = \dim(R'_{1, -1}) - (N + k + 1).$$

Доказательство. Идеал $\widehat{J}(F) \subset S'$ порожден своей однородной компонентой степени $(1, -1)$. Таким образом, если $\widehat{J}(F)_{p, q}$ — нетривиальная однородная компонента идеала $\widehat{J}(F)$ степени (p, q) , то либо $p \geq 2$, либо $q = -1$. Это значит, что для любого $i \geq 2$ выполнено $\widehat{J}(F)_{1, -i} = 0$, так что кольцо $R'_{1, -i}$ изоморфно проецируется на $R_{1, -i}$.

Для доказательства второго утверждения заметим, что производные

$$F_{z_s} = \frac{\partial F}{\partial z_s} \in R'$$

имеют степени

$$\deg(F_{z_s}) = \deg(F) - \deg(z_s) = (1, 0) - (0, 1) = (1, -1).$$

Таким образом, разность

$$\delta(f_1, \dots, f_k) = \dim(R'_{1, -1}(f_1, \dots, f_n)) - \dim(R_{1, -1}(f_1, \dots, f_n))$$

равна размерности подпространства пространства $R'_{1,-1}(f_1, \dots, f_n)$, порожденного многочленами F_{z_s} . По лемме 7.5, размерность $\dim(R'_{1,-1}(f_1, \dots, f_n))$ не зависит от многочленов f_1, \dots, f_k (если они определяют полное пересечение). Аналогично, числа Ходжа гладкого полного пересечения также не зависят от многочленов f_1, \dots, f_k . Таким образом, теорема 7.8 означает, что для того, чтобы вычислить $\delta(f_1, \dots, f_k)$, можно выбрать такие многочлены f_1, \dots, f_k , какие мы хотим, если определяемое ими полное пересечение остается гладким.

Пусть степень d_1 is минимальна среди d_j . Выберем многочлен

$$f_1 = z_1^{d_1} + \dots + z_{N+k+1}^{d_1}$$

и многочлены f_2, \dots, f_k , такие что многообразие, определенное уравнениями $f_1 = \dots = f_k = 0$, является гладким полным пересечением гиперповерхностей $f_j = 0$ (впрочем, последнее предположение не будет нами использовано). Утверждается, что многочлены

$$F_{z_s} \in R'_{1,-1}(f_1, \dots, f_k)$$

линейно независимы. Действительно, пусть это неверно, то есть пусть для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+k+1} \in \mathbb{C}$ выполнено

$$\sum_{s=1}^{N+k+1} \lambda_s F_{z_s} = 0 \in R'_{1,-1}(f_1, \dots, f_n).$$

Взяв коэффициент при w_1 , получим

$$\sum_{s=1}^{N+k+1} \lambda_s \frac{\partial f_1}{\partial z_s} = 0 \in R'_{1,-1}(f_1, \dots, f_n).$$

Так как

$$\deg\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_s}\right) = d_1 - 1 < d_1 = \min\{\deg(f_i)\},$$

получим

$$\sum_{s=1}^{N+k+1} \lambda_s \frac{\partial f_1}{\partial z_s} = 0$$

в $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_{N+k+1}]$. После замены

$$f_1 = z_1^{d_1} + \dots + z_{N+k+1}^{d_1}$$

мы приходим к равенству

$$\sum_{s=1}^{N+k+1} \lambda_s z_s^{d_1-1} = 0$$

в $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_{N+k+1}]$, которое и дает противоречие. \square

Предложение 7.11. *Если $i(X) \geq 2$, то*

$$\dim(R_{1,-i(X)}) = \sum_{j=1}^k \sum_{I \subset [1,k]} (-1)^{k-|I|} \binom{(\sum_{s \in I} d_s) + d_j - 1}{N+k}.$$

Если $i(X) = 1$, то

$$\dim(R_{1,-i(X)}) = -(N+k+1) + \sum_{j=1}^k \sum_{I \subset I_k} (-1)^{k-|I|} \binom{(\sum_{s \in I} d_s) + d_j - 1}{N+k}.$$

Доказательство. Обозначим через $\Delta(d, m)$ размерность векторного пространства однородных многочленов степени d от m переменных. Тогда

$$\Delta(d, m) = \binom{d+m-1}{m-1}.$$

Для начала вычислим размерность Δ_j векторного пространства однородных многочленов от переменных z_1, \dots, z_{N+k+1} степени $d_j - i(X)$, которые не делятся на любой из многочленов f_t , $1 \leq t \leq k$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \sum_{I \subset [1,k]} (-1)^{|I|} \Delta \left(d_j - i(X) - \left(\sum_{s \in I} d_s \right), N+k+1 \right) = \\ &= \sum_{I \subset [1,k]} (-1)^{|I|} \binom{(\sum_{s \in [1,k] \setminus I} d_s) + d_j - 1}{N+k} = \\ &= \sum_{I \subset [1,k]} (-1)^{k-|I|} \binom{(\sum_{s \in I} d_s) + d_j - 1}{N+k}. \end{aligned}$$

Напомним, что

$$\dim (R'_{1,-i(X)}(f_1, \dots, f_k)) = \dim (R'_{1,-i(X)}(z_1^{d_1}, \dots, z_k^{d_k}))$$

по лемме 7.5. С другой стороны, можно напрямую увидеть, что

$$\dim (R'_{1,-i(X)}(z_1^{d_1}, \dots, z_k^{d_k})) = \sum_{j=1}^k \Delta_j.$$

Наконец, по лемме 7.10, имеем

$$\dim (R_{1,-i(X)}(f_1, \dots, f_k)) = \dim (R'_{1,-i(X)}(f_1, \dots, f_k))$$

если $i(X) \geq 2$ и

$$\dim (R_{1,-i(X)}(f_1, \dots, f_k)) = \dim (R'_{1,-i(X)}(f_1, \dots, f_k)) - (N + k + 1),$$

если $i(X) = 1$, что и завершает доказательство. \square

Следствие 7.12. Пусть $k = 1$. Тогда

$$h_{pr}^{1,N-1}(X) = \binom{2d-1}{N+1}$$

если $d \leq N$ и

$$h_{pr}^{1,N-1}(X) = \binom{2N+1}{N+1} - N - 2$$

если $d = N + 1$.

Доказательство. Применим предложение 7.11 для $k = 1$ и $d_1 = d$. \square

Формулы из предложения 7.11 имеют нужный нам для дальнейшего вид. С другой стороны, они не так удобны для конкретных вычислений. Поэтому мы приведем более удобные формулы (которыми мы не будем пользоваться в дальнейшем).

Предложение 7.13. Выполнено

$$\dim (R_{1,-i(X)}) = \sum_{j=1}^k \sum_{i_1=0}^{d_1-1} \dots \sum_{i_k=0}^{d_k-1} \binom{\sum_{t=1}^k (d_t - i_t) + d_j - k - 1}{N}$$

для $i(X) \geq 2$ и

$$\dim (R_{1,-i(X)}) = -(N + k + 1) + \sum_{j=1}^k \sum_{i_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{d_k-1} \binom{\sum_{t=1}^k (d_t - i_t) + d_j - k - 1}{N}$$

для $i(X) = 1$.

Доказательство. По лемме 7.5, выполнено

$$\dim (R'_{1,-i(X)}(f_1, \dots, f_k)) = \dim (R'_{1,-i(X)}(z_1^{d_1}, \dots, z_k^{d_k})).$$

Вычислим правую часть равенства. В качестве базиса компоненты

$$R'_{1,-i(X)}(z_1^{d_1}, \dots, z_k^{d_k})$$

можно выбрать мономы вида

$$M_{j,i_1,\dots,i_k} = w_j z_1^{i_1} \cdots z_{N+k+1}^{i_{N+k+1}},$$

где $1 \leq j \leq k$, для $1 \leq t \leq k$ выполнены равенства $0 \leq i_t \leq d_t - 1$ и

$$\sum_{r=1}^{N+k+1} i_r = d_j - i(X) = \left(\sum_{t=1}^k d_t \right) + d_j - N - k - 1.$$

Имеем

$$\dim (R'_{1,-i(X)}(z_1^{d_1}, \dots, z_k^{d_k})) = \sum_{j=1}^k \sum_{i_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{d_k-1} \Delta \left(\left(\sum_{t=1}^k d_t - i_t \right) + d_j - N - k - 1, N + 1 \right).$$

Предположим, что $i(X) \geq 2$. По лемме 7.10, имеем

$$\dim (R_{1,-i(X)}(f_1, \dots, f_k)) = \dim (R'_{1,-i(X)}(f_1, \dots, f_k)),$$

поэтому утверждение леммы выполнено по приведенному выше вычислению.

Пусть теперь $i(X) = 1$. По лемме 7.10, имеем

$$\dim (R_{1,-1}(f_1, \dots, f_k)) = \dim (R'_{1,-1}(f_1, \dots, f_k)) - (N + k + 1),$$

так что утверждение леммы следует из рассуждения, аналогичного приведенному выше. \square

Приведем теперь простое, но полезное комбинаторное наблюдение.

Лемма 7.14. Пусть $d_1, \dots, d_k, e, l \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\sum_{i_1=0}^{d_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{d_k} \binom{d_1}{i_1} \cdots \binom{d_k}{i_k} \binom{e}{i_1 + \dots + i_k + l} = \binom{d_1 + \dots + d_k + e}{d_1 + \dots + d_k + l}.$$

Доказательство. Доказательство элементарно (и достаточно стандартно), но мы для удобства приведем его. Рассмотрим множество Γ , состоящее из

$$|\Gamma| = d_1 + \dots + d_k + e$$

элементов, и разделим его на подмножества

$$\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_{k+1},$$

содержащие d_1, \dots, d_k и e элементов соответственно. Теперь выбрать подмножество $\Gamma' \subset \Gamma$ из

$$|\Gamma'| = d_1 + \dots + d_k + l$$

элементов — это то же самое, что выбрать подмножества $\Gamma'_i \subset \Gamma_i$ для всех $1 \leq i \leq k+1$, так что

$$\Gamma' = \left((\Gamma_1 \setminus \Gamma'_1) \sqcup \dots \sqcup (\Gamma_k \setminus \Gamma'_k) \right) \sqcup \Gamma'_{k+1}.$$

Осталось положить $i_j = |\Gamma'_j|$ для $1 \leq j \leq k$ и заметить, что

$$|\Gamma'_{k+1}| = i_1 + \dots + i_k + l.$$

□

Теперь напомним основные понятия, связанные с раздутиями, и на основе этого опишем разрешения некоторых специальных гиперповерхностей.

Рассмотрим аффинную гиперповерхность $L = \{f = 0\} \subset \mathbb{A}[x_1, \dots, x_n]$. Предположим, что линейное пространство $\Lambda = \{x_1 = \dots = x_k = 0\}$ содержится в L . Раздутие гиперповерхности L в Λ задается тем же уравнением

$f = 0$ в $\mathbb{A}[x_1, \dots, x_n] \times \mathbb{P}[x'_1 : \dots : x'_k]$ вместе с уравнениями

$$\{x_i x'_j = x'_i x_j\}, \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

Локальные карты раздутий задаются через $x'_i \neq 0$, $i = 1, \dots, k$. В этих локальных картах для простоты мы пишем x_i вместо x'_i ; в действительности, уравнение раздутой гиперповерхности в локальной карте, соответствующей x_i , получается из исходного уравнения заменой координат

$$x_i \mapsto x_i, x_j \mapsto x_i x_j, \quad 1 \leq j \leq k, j \neq i,$$

и делением на максимально возможную степень переменной x_i . Исключительное множество задается уравнением $x_i = 0$. Поэтому мы используем для этой локальной карты обозначение $x_i \neq 0$ и рассматриваем описанное выше уравнение раздутия.

Замечание 7.15. В дальнейшем нам понадобится следующий общий факт о дискрепантностях раздутий. Пусть A — гладкое n -мерное многообразие, пусть L — нормальная неприводимая гиперповерхность в A , и пусть $\Lambda \subset L$ — гладкое неприводимое подмногообразие размерности r . Пусть $\pi: \tilde{A} \rightarrow A$ — раздутие многообразия A вдоль Λ , и пусть E — исключительный дивизор для π . Тогда

$$K_{\tilde{A}} \sim \pi^* K_A + (n - r - 1)E.$$

Обозначим через m кратность гиперповерхности L в общей точке подмногообразия Λ . Обозначим через \tilde{L} собственный прообраз гиперповерхности L и предположим, что \tilde{L} нормально. Тогда

$$K_{\tilde{L}} \sim \pi^* K_L + (n - r - 1 - m) E|_{\tilde{L}}.$$

В частности, если $n - r - 1 - m = 0$, то морфизм $\pi: \tilde{L} \rightarrow L$ крепантен (заметим, что дивизор $E|_{\tilde{L}}$ может быть приводимым или неприведенным).

Пусть $\bar{d} = (d_1, \dots, d_k)$ для $k \geq 0$ и $d_i > 0$. Рассмотрим аффинную гиперповерхность $L_{\bar{d},s}$, заданную уравнением

$$a_1^{d_1} \cdot \dots \cdot a_k^{d_k} = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_s$$

в аффинном пространстве $\mathbb{A}[a_1, \dots, a_k, \lambda, x_1, \dots, x_s]$ как семейство гиперповерхностей в аффинном пространстве $\mathbb{A}[a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_s]$, параметризованное $\lambda \in \mathbb{C}$.

В большинстве случаев гиперповерхность $L_{\bar{d},s}$ особа, но она всегда допускает крепантное разрешение (см. процедуру разрешения 7.17). Мы собираемся построить такое разрешение и найти число компонент его центрального слоя (то есть слоя над $\lambda = 0$).

Замечание 7.16. Построив разрешение, доминирующее два заданных, сразу получаем, что это число не зависит от конкретного разрешения.

Наша стратегия будет следующей. Исключительные дивизоры нашего разрешения происходят из разрешений с центрами в (некоторых) подмногообразиях гиперповерхности $L_{\bar{d},s}$, заданной обращением в ноль одной координаты a_j и нескольких координат x_i . Эти подмногообразия мы будем называть специальными стратами. Мы разрешим исходную гиперповерхность, раздувая эти страты в аккуратно выбранной последовательности и будем считать число возникающих компонент центрального слоя. Окажется, после раздутия особенности, которые нам остается раздуть, задаются в соответствующих аффинных картах уравнениями такого же типа, как и раньше, так что мы к ним можем применить ту же самую процедуру, и продолжать так до тех пор, пока мы не разрешим особенности (см. процедуру разрешения 7.17). Заметим, что в некоторых случаях специальные страты не содержатся в особом множестве гиперповерхности $L_{\bar{d},s}$.

Окажется, что на каждом шаге наше многообразие будет иметь гиперповерхностные особенности, и их кратность в страте, который мы будем раздувать на этом шаге, равна коразмерности этого страта. Это, согласно замечанию 7.15, значит, что раздутие крепантно, так что композиция таких раздутий будет крепантным разрешением особенностей.

Начнем с описания крепантного разрешения гиперповерхности $L_{\bar{d},s}$.

Процедура разрешения 7.17. Назовем пару $w(\bar{d}, s) = (s, \sum d_i)$ *весом* гиперповерхности $L_{\bar{d},s}$. Пусть X — многообразие, которое покрывается аффинными картами U_p типа $L_{\bar{d},s_p}$. Будем говорить, что они *согласованы*, если для любых двух карт U_p и U_q выполнено следующее свойство: для любой переменной a_i в U_p замыкание дивизора $a_i = 0$ в X пересекает U_q либо по пустому множеству, либо по дивизору $a_{i'} = 0$, и для любой переменной x_j в U_p замыкание дивизора $x_j = 0$ в X пересекает U_q либо по пустому множеству, либо по дивизору $x_{j'} = 0$. Заметим, что для $k = 0$ или $s = 0$ многообразие $L_{\bar{d},s}$ гладко. Поэтому будем предполагать, что $k \geq 1$ и $s \geq 1$.

Предположим, что $d_1 \geq s$. Раздуем страт

$$\Lambda = \{a_1 = x_1 = \dots = x_s = 0\}.$$

В локальной карте $a_1 \neq 0$ мы получим гиперповерхность, задающуюся уравнением

$$a_1^{d_1-s} \cdot \dots \cdot a_k^{d_k} = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_s.$$

Эта гиперповерхность типа $L_{(d_1-s, d_2, \dots, d_k), s}$ веса $(s, \sum d_i - s)$, который лексикографически меньше, чем $(s, \sum d_i)$.

В локальной карте $x_i \neq 0$ получим гиперповерхность, заданную уравнениями

$$a_1^{d_1} \cdot \dots \cdot a_k^{d_k} \cdot a_{k+1}^{d_1-s} = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_s,$$

где переменная x_i обозначена через a_{k+1} . Эта гиперповерхность имеет тип $L_{(d_1, \dots, d_k, d_1-s), s-1}$ веса $(s-1, \sum d_i + d_1 - s)$, который лексикографически меньше, чем $(s, \sum d_i)$.

Предположим, что $d_1 < s$. Раздуем страт

$$\Lambda = \{a_1 = x_1 = \dots = x_{d_1} = 0\}.$$

Заметим, что этот морфизм может быть малым. Так бывает, например, когда $d_1 = \dots = d_k = 1$.

В локальной карте $a_1 \neq 0$ получим гиперповерхность, заданную уравнением

$$a_2^{d_2} \cdot \dots \cdot a_k^{d_k} = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_s.$$

Она является гиперповерхностью типа $L_{(d_2, \dots, d_k), s}$ веса $(s, \sum d_i - d_1)$, который лексикографически меньше, чем $(s, \sum d_i)$.

В локальной карте $x_i \neq 0$ получим гиперповерхность, заданную уравнением

$$a_1^{d_1} \cdot \dots \cdot a_k^{d_k} = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_s.$$

Она является гиперповерхностью типа $L_{\bar{d}, s-1}$ веса $(s-1, \sum d_i)$, который лексикографически меньше, чем $(s, \sum d_i)$.

Мы утверждаем, что определенные выше раздутия крепантны. Действительно, в каждом случае кратность особенности гиперповерхности $L_{\bar{d}, s}$ в Λ равна гиперповерхности многообразия Λ , так что мы можем применить замечание 7.15.

Заметим, что полученные нами карты согласованы друг с другом. Более того, дивизор, заданный уравнением $a_i = 0$ в одной из таких карт соответствует дивизору, заданному уравнением $a_i = 0$ в другой карте, если пересечение этих карт непусто.

Применим теперь описанную выше процедуру одновременно во всех аффинных картах, в которых наше уравнение зависит от переменной a_1 . Так

как эти карты согласованы друг с другом, раздутия этих карт согласованы друг с другом и определяют раздутие всего (неаффинного) многообразия. Если переменной a_1 нет в какой-либо аффинной карте, мы одновременно во всех картах изменим нумерацию переменных a_i (опять используя, что они согласованы), и запустим процедуру с новой переменной a_1 . На каждом шаге вес лексикографически убывает, так что через конечное число шагов мы получим разрешение особенностей.

Теперь мы подсчитаем число исключительных дивизоров над $\lambda = 0$, возникающих в процедуре разрешения 7.17, примененной к гиперповерхности $L_{\bar{d},s}$. Мы начнем с частного случая, из которого в конце концов будет следовать общий.

Рассмотрим аффинную гиперповерхность $L_{d,s}$ для $d \geq 1$ и $s \geq 1$, заданную уравнением

$$a^d = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_s$$

в аффинном пространстве $\mathbb{A}[a, \lambda, x_1, \dots, x_s]$. Мы будем рассматривать ее как семейство гиперповерхностей в $\mathbb{A}[a, x_1, \dots, x_s]$, параметризованных $\lambda \in \mathbb{C}$.

Пусть $F(d, s)$ — число компонент (то есть число исключительных дивизоров плюс один) слоя над $\lambda = 0$ в (любом) крепантном разрешении особенностей гиперповерхности $L_{d,s}$. В частности, $L_{d,0}$ является гладкой гиперповерхностью, так что $F(d, 0) = 1$.

Специальный страт для $L_{d,s}$, который мы использовали в процедуре разрешения 7.17, задается уравнениями

$$a = x_1 = \dots = x_s = 0,$$

если $d \geq s$, и уравнениями

$$a = x_{i_1} = \dots = x_{i_d} = 0$$

для любого подмножества индексов $\{i_1, \dots, i_d\} \subset \{1, \dots, s\}$, если $d < s$. Исключительные дивизоры в центральном слое с центрами на $L_{d,s}$, содержащие

(одни из) самых глубоких стратов имеют два типа: один тип, центры для которых являются пересечениями центрального слоя со специальными стратами меньшей коразмерности, а другой — центры для которого совпадают с пересечением центрального слоя с наиболее глубоким специальным стратом. Мы обозначим число исключительных дивизоров второго типа через $G(d, s)$. Положим вдобавок $G(d, 0) = 1$ и $F(r, s) = 0$ для $r \leq 0$.

Лемма 7.18. *Выполнено $G(d, s) = F(d - s, s)$.*

Доказательство. Мы будем следовать процедуре разрешения 7.17, чтобы сосчитать число исключительных дивизоров в центральном слое. В частности, мы будем игнорировать локальные карты, в которых таких дивизоров не возникает.

Предположим, что $d > s$. Будем называть страт, заданный уравнениями

$$a = x_1 = \dots = x_s = 0$$

каноническим. Раздуем его. В локальной карте $a \neq 0$ мы получим гиперповерхность, заданную уравнением

$$a^{d-s} = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_s$$

и один исключительный дивизор в центральном слое. Это уравнение определяет многообразие $L_{d-s,s}$. Поэтому общее число исключительных дивизоров в центральном слое в этой локальной карте равно числу исключительных дивизоров для $L_{d-s,s}$ плюс один, то есть $F(d - s, s)$. В локальной карте $x_i \neq 0$ получаем гиперповерхность, заданную уравнением

$$x_i^{d-s} a^d = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_s.$$

Исключительные дивизоры для разрешения особенностей гиперповерхности $L_{d,s}$, задающегося процедурой разрешения 7.17 в этой локальной карте, которые лежат в центральном слое и не пересекаются с локальной картой $a \neq 0$,

на самом деле лежат над пересечением центрального слоя со стратом

$$\{a = x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_s = 0\},$$

то есть они приходят со страта для $L_{d,s}$ меньшей коразмерности. Таким образом, эти дивизоры не дают дополнительного вклада в $G(d, s)$. Таким образом, получим равенство

$$G(d, s) = F(d - s, s)$$

для $d > s$.

Предположим, что $d \leq s$. Тогда, за исключением случая $d = s$, существует несколько самых глубоких стратов. Раздуем один из них, задающийся уравнением

$$a = x_1 = \dots = x_d = 0.$$

В локальной карте $a \neq 0$ мы получим гиперповерхность, задающуюся уравнением

$$1 = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_s.$$

В окрестности исключительного дивизора эта гиперповерхность гладкая. В локальной карте $x_i \neq 0$ мы получим гиперповерхность, задающуюся уравнением

$$a^d = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_s.$$

Самые глубокие специальные страты в этой карте задаются уравнениями

$$a = x_{i_1} = \dots = x_{i_d}, \quad \{i_1, \dots, i_d\} \subset \{1, \dots, s\} \setminus \{i\}.$$

Это значит, что раздутие самых глубоких специальных стратов является изоморфизмом в окрестности общих точек пересечения центрального слоя с такими стратами, так что раздутие самых глубоких специальных стратов не дает вклад во множество исключительных дивизоров над $\lambda = 0$. Раздувая эти страты один за другим, получаем $G(d, s) = 0$ для $d \leq s$. \square

Лемма 7.19. Для всех $d, s \geq 0$ выполнено

$$F(d, s) = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} G(d, i).$$

Доказательство. Применим процедуру разрешения 7.17 и сложим числа исключительных дивизоров, происходящих из каждого страта. \square

Предложение 7.20. Для всех $d \geq 1$ и $s \geq 0$ выполнено

$$G(d, s) = \binom{d-1}{s}.$$

Доказательство. По определению, имеем $G(d, 0) = 1$ для всех $d \geq 1$. Кроме того, если $d \leq s$, утверждение верно по лемме 7.18. Оставшуюся часть утверждения докажем по индукции. Пусть $d > s > 0$, и пусть формула верна для всех $G(d', s')$, таких что $d' < d$ и $s' \leq s$. Вычислим

$$G(d, s) = F(d-s, s) = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} G(d-s, i) = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \binom{d-s-1}{i} = \binom{d-1}{s},$$

где первое равенство следует из леммы 7.18, второе является применением леммы 7.19, третье является предположением индукции, а четвертое следует из леммы 7.14 при $k = 1$, $d_1 = d$ и $e = d - s - 1$. \square

Пример 7.21. Рассмотрим гиперповерхность $L_{d+1,1}$. Она задается уравнением $a^{d+1} = \lambda x$, определяя, таким образом (конус над) особенностью типа A_d . На первом шаге процедуры разрешения 7.17 раздуем страт $a = x = 0$, получив один исключительный дивизор в центральном слое. В локальной карте $x \neq 0$ результат раздутия будет гладким. В другой карте получим гиперповерхность $\{a^d = \lambda x\}$, то есть дювалевскую особенность типа A_{d-1} . Таким образом, следуя процедуре разрешения 7.17, мы разрешим исходную особенность за d шагов, получая один исключительный дивизор на каждом шаге. Таким образом, $F(d+1, 1) = d+1$.

Заметим, что если $d \geq 2$, то мы можем получить то же самое разрешение более быстрым и стандартным способом, раздувая особое множество $a =$

$\lambda = x = 0$. Это дает сразу два исключительных дивизора и дювалевскую особенность типа A_{d-2} .

На практике мы часто будем избегать буквального применения процедуры разрешения 7.17 и будем применять приемы, подобные описанному в примере 7.21, для того, чтобы построить разрешение быстрее.

Пример 7.22. Рассмотрим гиперповерхность $L_{3,s}$.

(i) Пусть $s = 1$. Гиперповерхность $L_{3,1}$ задается уравнением $a^3 = \lambda x$. Оно определяет дювалевскую особенность типа A_2 . Поэтому, согласно примеру 7.21, имеем $F(3, 1) = 3$.

(ii) Пусть $s = 2$. Гиперповерхность $L_{3,2}$ задается уравнением $a^3 = \lambda xy$. Ее особенности состоят из трех прямых в $\mathbb{A}[a, \lambda, x, y]$, две из которых лежат в центральном слое, так что все три прямые пересекаются по точке. Раздвигая “горизонтальную” прямую $a = x = y = 0$. В локальной карте $a \neq 0$ мы получим гладкую гиперповерхность $\{a = \lambda xy\}$ и три исключительных дивизора $E_1 = \{a = \lambda = 0\}$, $H_1 = \{a = x = 0\}$ и $H_2 = \{a = y = 0\}$. Дивизор E_1 лежит в центральном слое. В локальной карте $x \neq 0$ получим гиперповерхность

$$\{a^3 x = \lambda y\}.$$

Исключительными дивизорами в этой карте являются дивизоры $E_1 = \{x = \lambda\}$ и $H_2 = \{x = y = 0\}$. Таким же образом получим исключительные дивизоры E_1 и H_1 в локальной карте $y \neq 0$.

Рассмотрим гиперповерхность $L_{(3,1),1}$, заданную уравнением $a^3 x = \lambda y$. Вместо того, чтобы следовать процедуре разрешения 7.17, применим трюк, подобный описанному в примере 7.21. Особым множеством этой гиперповерхности является прямая

$$\{a = \lambda = y = 0\}.$$

Раздуем ее. В локальной карте $a \neq 0$ получим гиперповерхность $\{ax = \lambda y\}$ и два исключительных дивизора $E_2 = \{a = \lambda = 0\}$ и $E_3 = \{a = y = 0\}$, оба лежащие в центральном слое. Особенности в этой локальной карте является одна обыкновенная двойная точка, допускающая малое разрешение. В двух других локальных картах, $\lambda \neq 0$ и $y \neq 0$, мы получим гладкую гиперповерхность, содержащую исключительные дивизоры E_3 в первой карте и E_2 во второй.

Таким же образом из гиперповерхности $\{a^3 y = \lambda x\}$ мы получим два исключительных дивизора E_4 и E_5 . Таким образом, дивизоры E_1, \dots, E_5 , вместе с исходным центральным слоем, образуют центральный слой разрешения, и $F(3, 2) = 6$.

- (iii) Пусть $s = 3$. Гиперповерхность $L_{3,3}$ задается уравнением $a^3 = \lambda xyz$. Раздуем канонический страт

$$\{a = x = y = z = 0\}.$$

В локальной карте $a \neq 0$ мы получим гладкую гиперповерхность $\{1 = \lambda xyz\}$ и один “горизонтальный” исключительный дивизор. В локальной карте $x \neq 0$ получим гиперповерхность $\{a^3 = \lambda yz\}$, содержащую тот же самый исключительный дивизор. Разрешая эту гиперповерхность, мы получим пять исключительных дивизоров в центральном слое, четыре из которых — общие с другими локальными картами $y \neq 0$ и $z \neq 0$. В итоге мы получим 10 исключительных дивизоров, и $F(3, 3) = 10$.

- (iv) Пусть $s > 3$. Гиперповерхность $L_{3,s}$ задается уравнением

$$a^3 = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_s.$$

Раздуем страт

$$\{a = x_i = x_j = x_k = 0\}.$$

В локальной карте $a \neq 0$ мы получим гладкую гиперповерхность без исключительных дивизоров в центральном слое. В локальной карте $x_i \neq 0$ мы получим уравнение

$$a^3 = \lambda x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_s,$$

также без исключительных дивизоров в центральном слое. То же самое происходит и в других локальных картах $x_j \neq 0$ и $x_k \neq 0$. Можно продолжать эту процедуру, уменьшая параметр s до 2. В итоге получим $\frac{s(s-1)}{2}$ исключительных дивизора в центральном слое, соответствующие $\frac{s(s-1)}{2}$ стратам типа $a = x_i = x_j = 0$, $2s$ исключительных дивизора, соответствующие стратам $a = x_i = \lambda = 0$ и исходный центральный слой. В итоге получим

$$F(3, s) = \frac{s(s-1)}{2} + 2s + 1 = \binom{s}{2}.$$

Пусть $F(\bar{d}, s)$ — число компонент центрального слоя крепантного разрешения гиперповерхности $L_{\bar{d},s}$ (как и раньше, число $F(\bar{d}, s)$ не зависит от выбора крепантного разрешения).

Лемма 7.23. *Для любого \bar{d} выполнено*

$$F(\bar{d}, s) = \sum_{i=1}^k \binom{d_i + s - 1}{s}.$$

Доказательство. Разрешим особенности с помощью процедуры разрешения 7.17. А именно, сперва разрешим особенности, лежащие над $\{a_1 = 0\}$, потом — лежащие над $\{a_2 = 0\}$, и так далее. В итоге получим

$$F(\bar{d}, s) = \sum_{i=1}^k F(d_i, s),$$

и утверждение леммы следует из леммы 7.18 и предложения 7.20. \square

Рассмотрим полное пересечение $X \subset \mathbb{P}^{N+k}$ гиперповерхностей степеней d_1, \dots, d_k . Напомним, что ее торической моделью Ландау–Гинзбурга является многочлен

$$f_X = \frac{\prod_{i=1}^k (x_{i,1} + \dots + x_{i,d_i-1} + 1)^{d_i}}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{d_i-1} x_{i,j} \prod_{j=1}^l y_j} + y_1 + \dots + y_l,$$

где

$$l = N + k - \sum d_i = i(X) - 1 \geq 0$$

(см. следствие 5.27).

Рассмотрим послойную компактификацию гиперповерхности, заданной уравнением $f_X = \lambda$, иными словами (особую) гиперповерхность LG_X^s в пространстве $\mathbb{P}^{d_1-1} \times \dots \times \mathbb{P}^{d_k-1} \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{A}^1$, заданную уравнением

$$y_0^{l+1} \prod_{i=1}^k (x_{i,1} + \dots + x_{i,d_i})^{d_i} = (\lambda y_0 - y_1 - \dots - y_l) \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{d_i} x_{i,j} \prod_{j=1}^l y_j,$$

в котором $x_{i,1}, \dots, x_{i,d_i}$ — однородные координаты в \mathbb{P}^{d_i-1} , и y_0, \dots, y_l однородные координаты в \mathbb{P}^l . Мы получим (открытое) многообразие Калаби–Яу. Применяя процедуру разрешения 7.17, мы собираемся построить компактификацию Калаби–Яу LG_X нашей торической модели Ландау–Гинзбурга (ср. теорему 5.19).

Единственным слоем компактифицированного расслоения, который может быть приводимым, является слой над $\lambda = 0$. Согласно замечанию 7.16, число его неприводимых компонент (равное $k_{LG_X} + 1$ по определению числа k_{LG_X} , см. начало этой части), не зависит от выбора компактификации Калаби–Яу.

Теорема 7.24. *Для компактификации Калаби–Яу LG_X торической модели Ландау–Гинзбурга f_X выполнено*

$$h^{1,N-1}(X) = k_{LG_X}$$

если $N > 2$, и

$$h^{1,1}(X) = k_{LG_X} + 1$$

если $N = 2$.

Доказательство. В окрестности множества $\{y_0 = 0\}$ гиперповерхность LG_X^s аналитически эквивалентна гиперповерхности, покрываемой локальными картами, в котором она имеет вид

$$u_0^{l+1} \cdot u_1^{d_1} \cdot \dots \cdot u_k^{d_k} = v_1 \cdot \dots \cdot v_s$$

для некоторых переменных $u_0, \dots, u_k, v_1, \dots, v_s$, где $s < N$. Каждая из этих карт имеет крепантное разрешение (см. процедуру разрешения 7.17). Более того, эти разрешения согласованы друг с другом. Наконец, уравнения гиперповерхности в этих картах не зависят от λ , так что в этих картах нет исключительных дивизоров в центральном слое.

Таким образом, можно считать, что $y_0 \neq 0$. Аналогично, в локальных картах $y_0 \neq 0$, $y_i \neq 0$, $i \in [1, l]$. Существует крепантное разрешение без исключительных дивизоров в центральном слое. Это значит, что нам достаточно рассмотреть только окрестность множества, заданного через

$$y_0 \neq 0, y_1 = \dots = y_l = 0.$$

В частности, в окрестности точки центрального слоя, доминируемой исключительным дивизором, уравнение гиперповерхности LG_X^s может быть аналитически переписано как уравнение

$$a_1^{d_1} \cdot \dots \cdot a_k^{d_k} = \lambda y_1 \cdot \dots \cdot y_l \cdot \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{d_i} x_{i,j},$$

где

$$a_i = x_{i,1} + \dots + x_{i,d_i},$$

которое определяет гиперповерхность в

$$\mathbb{P}^{d_1-1} \times \dots \times \mathbb{P}^{d_k-1} \times \mathbb{A}^l \times \mathbb{A}^1.$$

Более того, исключительные дивизоры над $\lambda = 0$ лежат над общими точками стратов, задающихся уравнениями

$$a_r = y_1 = \dots = y_l = 0$$

для некоторых $1 \leq r \leq k$ и обращением в ноль некоторых переменных $x_{i,j_1}, \dots, x_{i,j_{s_i}}$ для различных $1 \leq i \leq k$, таких что для $i \neq r$ выполнено $s_i \leq d_i - 1$, и для $i = r$ выполнено $s_i \leq d_i - 2$, а общее число $\sum s_i$ обращающихся в ноль переменных $x_{i,j}$ равно как минимум одному, если $l = 0$. Для любых $i \in \{1, \dots, k\}$ проективное пространство \mathbb{P}^{d_i-1} покрывается локальными картами $x_{i,r} \neq 0$. В каждой из этих карт возьмем в качестве координат

$$a_i, x_{i,1}, \dots, x_{i,r-1}, x_{i,r+1}, \dots, x_{i,d_i}.$$

Аналитически в этих локальных картах, взятых для всех i , гиперповерхность LG_X^s имеет тип $L_{\bar{d},s}$ для $\bar{d} = (l+1, d_1, \dots, d_k)$, и $s \leq l + \sum d_i - k = N$. Для того, чтобы вычислить общее число исключительных дивизоров над центральным слоем гиперповерхности LG_X^s , нужно сложить вклады различных канонических стратов, см. доказательство леммы 7.18.

Пусть $I_k = \{1, \dots, k\}$, и для $1 \leq j \leq k$ положим $I_k^j = I_k \setminus \{j\}$. Если $l \geq 1$, то канонические страты пронумерованы выбором индекса $j \in I_k$, и i_t переменных из набора $x_{t,1}, \dots, x_{t,d_t}$ для всех $1 \leq t \leq k$, где $0 \leq i_t \leq d_t - 1$ для $t \neq j$, и $0 \leq i_j \leq d_j - 2$. Суммируя эти вложения канонических стратов, мы видим, что число исключительных компонент, лежащих над центральным слоем гиперповерхности LG_X^s равно

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k \sum_{i_j=0}^{d_1-2} \sum_{s \in I_k^j} \sum_{i_s=0}^{d_1-1} \binom{d_1}{i_1} \cdots \binom{d_k}{i_k} \cdot G(d_j, (\sum_{s \in I_k} i_s) + l) = \\
& = \sum_{j=1}^k \sum_{i_j=0}^{d_1-2} \sum_{s \in I_k^j} \sum_{i_s=0}^{d_1-1} \binom{d_1}{i_1} \cdots \binom{d_k}{i_k} \cdot \binom{d_j-1}{(\sum_{s \in I_k} i_s) + l} = \\
& = \sum_{j=1}^k \sum_{i_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{d_k-1} \binom{d_1}{i_1} \cdots \binom{d_k}{i_k} \cdot \binom{d_j-1}{(\sum_{s \in I_k} i_s) + l} = \\
& = \sum_{j=1}^k \sum_{I \subset I_k} (-1)^{k-|I|} \left(\sum_{s \in I} \sum_{i_s=0}^{d_s} \left(\prod_{s \in I} \binom{d_s}{i_s} \right) \binom{d_j-1}{(\sum_{s \in I} i_s) + (\sum_{s \in I_k \setminus I} d_s) + l} \right) = \\
& = \sum_{j=1}^k \sum_{I \subset I_k} (-1)^{k-|I|} \binom{(\sum_{s \in I} d_s) + d_j - 1}{(\sum_{s \in I_k} d_s) + l} = \\
& = \sum_{j=1}^k \sum_{I \subset I_k} (-1)^{k-|I|} \binom{(\sum_{s \in I} d_s) + d_j - 1}{N + k}.
\end{aligned}$$

Здесь первое равенство следует из предложения 7.20. Второе следует из того факта, что если $l \geq 1$, а i_s выбрано так, что $i_s = d_s - 1$, то соответствующее слагаемое равно 0 независимо от выбора i_t для $t \neq s$. Третье равенство является обычной формулой включения-исключения. Четвертое равенство является приложением леммы 7.14. Наконец, пятое равенство следует из определения числа l . Компонентами центрального слоя для LG_X являются исключительные дивизоры и собственный прообраз (неприводимого) центрального слоя для LG_X^s . Таким образом, вычисленное выше число равно в точности k_{LG_X} . Сравнивая его с числом, вычисленным в предложении 7.11, получаем, что $k_{LG_X} = h_{pr}^{1, N-1}$.

Если $l = 0$, то канонические страты зависят от выбора $j \in I_k$ и i_t переменных из набора $x_{t,1}, \dots, x_{t,d_t}$ для всех $1 \leq t \leq k$, где $0 \leq i_t \leq d_t - 1$ для $t \neq j$, $0 \leq i_j \leq d_j - 2$, и где как минимум одно из чисел i_1, \dots, i_k не равно

нулю. Суммируя вклады этих канонических стратов, мы видим, что число исключительных компонент над центральным слоем гиперповерхности LG_X^s равно

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^k \binom{d_1}{0} \cdots \binom{d_k}{0} \binom{d_j-1}{0} + \sum_{j=1}^k \sum_{i_j=0}^{d_1-2} \sum_{s \in I_k^j} \sum_{i_s=0}^{d_1-1} \binom{d_1}{i_1} \cdots \binom{d_k}{i_k} \binom{d_j-1}{\sum_{s \in I_k} i_s} = \\
& = -k + \sum_{j=1}^k \sum_{i_j=0}^{d_1-2} \sum_{s \in I_k^j} \sum_{i_s=0}^{d_1-1} \binom{d_1}{i_1} \cdots \binom{d_k}{i_k} \binom{d_j-1}{\sum_{s \in I_k} i_s} = \\
& = -(k + \sum_{s \in I_k} d_s) + \sum_{j=1}^k \sum_{i_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{d_k-1} \binom{d_1}{i_1} \cdots \binom{d_k}{i_k} \binom{d_j-1}{\sum_{s \in I_k} i_s} = \\
& = -(k + \sum_{s \in I_k} d_s) + \sum_{j=1}^k \sum_{I \subset I_k} (-1)^{k-|I|} \binom{(\sum_{s \in I} d_s) + d_j - 1}{(\sum_{s \in I_k} d_s)} = \\
& = -(N + 2k) + \sum_{j=1}^k \sum_{I \subset I_k} (-1)^{k-|I|} \binom{(\sum_{s \in I} d_s) + d_j - 1}{N + k}
\end{aligned}$$

Первые два равенства проверяются напрямую. Третье следует из формулы включения-исключения и леммы 7.14, так же как и в случае $l \geq 1$. Четвертое равенство следует из определения числа l . Компонентами центрального слоя для LG_X являются исключительные дивизоры и собственные прообразы компонент (приводимого) центрального слоя для LG_X^s . Центральный слой для LG_X^s состоит из k компонент. Таким образом, вычисленное выше число равно $k_{LG_X} - k + 1$. Сравнивая его с числом, найденным в предложении 7.11, получаем $k_{LG_X} = h_{pr}^{1, N-1}$.

Наконец, утверждение теоремы следует из того факта, что $h_{pr}^{N-p, p}(X) = h^{N-p, p}(X)$, за исключением случая $h_{pr}^{k, k}(X) = h^{k, k}(X) - 1$ для $N = 2k$. \square

Пример 7.25. Рассмотрим кубическую гиперповерхность X в \mathbb{P}^{N+1} .

(i) Пусть N равно 2. Тогда

$$f_X = \frac{(x_1 + x_2 + 1)^3}{x_1 x_2}$$

и LG_X^s задается уравнением

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = \lambda x_1 x_2 x_3.$$

Страт, который мы раздуваем, задается уравнениями

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_j = 0.$$

В окрестности такого страта модель LG_X^s изоморфна гиперповерхности $a^3 = \lambda x_j$. Таким образом,

$$k_{LG_X} = 3 \cdot 2 = 6$$

согласно примеру 7.22(1), и

$$h^{1,1}(X) = 7 = k_{LG_X} + 1.$$

(ii) Пусть N равно 3. Тогда

$$f_X = \frac{(x_1 + x_2 + 1)^3}{x_1 x_2 y_1} + y_1$$

и LG_X^s) задается уравнением

$$y_0^2(x_1 + x_2 + x_3)^3 = (\lambda y_0 + y_1)y_1 x_1 x_2 x_3.$$

Страт, который мы раздуваем, задается уравнениями

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 = x_j = 0, \quad y_0 = 1.$$

В окрестности такого страта модель LG_X^s аналитически эквивалентна гиперповерхности $a^3 = \lambda y_1 x_j$. Поэтому, по примеру 7.22(1), есть $F(3, 1) = 3$ центральные компоненты над общим для всех таких гиперповерхностей стратом (задающимся как $a = y_1 = 0$), и $G(3, 2) = 1$ центральных компонент (не приходящих со стратов большей размерности) для каждого такого страта. Таким образом,

$$k_{LG_X} = 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

и

$$h^{1,2}(X) = 5 = k_{LG_X}.$$

(iii) Пусть N равно 4. Тогда

$$f_X = \frac{(x_1 + x_2 + 1)^3}{x_1 x_2 y_1 y_2} + y_1 + y_2$$

и LG_X^s задается уравнением

$$y_0^3(x_1 + x_2 + x_3)^3 = (\lambda y_0 + y_1 + y_2)y_1 y_2 x_1 x_2 x_3.$$

Страт, который мы раздуваем, задается уравнениями

$$y_1 = y_2 = x_1 + x_2 + x_3 = x_j = 0, \quad y_0 = 1.$$

В окрестности такого страта модель LG_X^s аналитически эквивалентна гиперповерхности $a^3 = \lambda y_1 y_2 x_j$. Поэтому, по примеру 7.22(1), есть $F(3, 2) = 1$ центральные компоненты над общим для всех таких гиперповерхностей стратом (задающимся как $a = y_1 = y_2 = 0$), и $G(3, 3) = 0$ центральных компонент (не приходящих со стратов большей размерности) для каждого такого страта. Таким образом, $k_{LG_X} = 1$ и

$$h^{1,3}(X) = 1 = k_{LG_X}.$$

(iv) Пусть N больше, чем 4. Тогда

$$f_X = \frac{(x_1 + x_2 + 1)^3}{x_1 x_2 y_1 \cdots y_{N-2}} + y_1 + \cdots + y_{N-2}$$

и LG_X^s задается уравнением

$$y_0^{N-1}(x_1 + x_2 + x_3)^3 = (\lambda y_0 + y_1 + \cdots + y_{N-2})y_1 \cdots y_{N-2} x_1 x_2 x_3.$$

Страт, который мы раздуваем, задается уравнениями

$$y_1 = \cdots = y_{N-2} = x_1 + x_2 + x_3 = x_j = 0, \quad y_0 = 1.$$

В окрестности такого страта модель LG_X^s аналитически эквивалентна гиперповерхности

$$a^3 = \lambda y_1 \cdot \dots \cdot y_{N-2} x_j.$$

Поэтому, по примеру 7.22(1), есть $F(3, N - 2) = 0$ центральные компоненты над общим для всех таких гиперповерхностей стратом (задающимся как $a = y_1 = 0$), и $G(3, N - 1) = 0$ центральных компонент (не приходящих со стратов большей размерности) для каждого такого страта. Таким образом, $k_{LG_X} = 0$ и

$$h^{1, N-1}(X) = 0 = k_{LG_X}.$$

Мы закончим эту часть тем, что сформулируем несколько вопросов, связанных с теоремой 7.24.

Вопрос 7.26. *Наше доказательство теоремы 7.24 основано на чисто комбинаторных вычислениях. Существует ли способ установить естественное соответствие между множеством подходящих исключительных дивизоров и каким-то множеством $(1, N - 1)$ -классов? В частности, если есть полное пересечение X размерности N , существует ли выделенный способ выбрать базис в пространстве $H^{1, N-1}(X)$, который соответствует нашей процедуре? Если нет, то имеет смысл ослабленная версия нашего вопроса: существует ли выделенное семейство соответствий между подходящими исключительными дивизорами и $(1, N - 1)$ -классами? В частности, каждому исключительному дивизору естественно сопоставить положительное целое число, а именно, размерность центра дивизора. Существует ли естественная фильтрация на пространстве $H^{1, N-1}(X)$, соответствующая этой (или какой-нибудь другой) градуировке на пространстве дивизоров?*

Вопрос 7.27. Верно ли, что фильтрация на пространстве исключительных дивизоров, которую мы упомянули в вопросе 7.26 (то есть фильтрация по размерности центров дивизоров) естественная? Скажем, связана ли она с весовой фильтрацией смешанной структуры Ходжа, которая задана пучком исчезающих циклов (см. пункт 3.2.3)? Если нет, разумно задать вопрос 7.26 для более естественной фильтрации.

Вопрос 7.28 (ср. замечание 4.20). Рассмотрим N -мерное многообразие X . Пусть LG_X^s — (возможно особое) послойно компактное семейство, допускающее крепантное разрешение до N -мерной модели Ландау–Гинзбурга LG_X . Возможно ли вычислить число $h^{1,N-1}(X)$, используя только LG_X^s , а не LG_X ? Еще более интересно было бы найти какой-нибудь способ, который был бы более алгоритмичен, чем построение разрешения. (Это представляет больший интерес для произвольного многообразия Фано, а не просто для полного пересечения, так как для полного пересечения теорема 7.8 дает простой способ найти числа Ходжа, вообще не используя модели Ландау–Гинзбурга.) Может быть, возможно в этом случае использовать мотивное интегрирование (см., к примеру, [Cr04])?

Пример 7.29. Центральный слой содержит более глубокую информацию, чем просто число Ходжа. Согласно теореме 7.24, четырехмерная кубика X имеет две компоненты в центральном слое модели Ландау–Гинзбурга LG_X . Они пересекаются по некоторой специальной КЗ-поверхности с числом Пикара 20. Структура Ходжа четырехмерной кубики является суммой части, порожденной гиперплоским сечением, и примитивной структурой Ходжа в размерности 4 — структурой Ходжа веса 2 размерностей $(1, 20, 1)$. В частности, $h^{13} = 1$ и $h^{22} = 21$. Основываясь на этом, что из обобщенной зеркальной симметрии следует нерациональность общей четырехмерной кубики. Для других подходов к нерациональности общей четырехмерной кубики см. [Kuz10], [Kul08] (ср. [ABB13]) и ссылки в них.

Часть 8. Проекции

Гладкие многообразия Фано полностью классифицированы в размерности два (поверхности дель Пеццо, классификация восходит к итальянской школе алгебраической геометрии XIX века) и три (Исковских [Is77] и Мори–Мукаи [MM82]); случай размерности один тривиален. Напомним (см. определение 3.1), что поверхности дель Пеццо степени больше двух можно описать как поверхности степени n в \mathbb{P}^n ; таким образом, поверхность дель Пеццо можно получить проекцией из поверхности дель Пеццо большей степени. С другой стороны, чтобы получить “хорошие” торические вырождения поверхностей дель Пеццо (которые важны с точки зрения теории торических моделей Ландау–Гинзбурга, см параграф 3.1), достаточно просто выбирать торические центры проекций. С классификационной точки зрения нас интересуют не сами поверхности, а их пространства деформаций, поэтому торическая поверхность дель Пеццо как точка на пространстве деформаций полностью определяет класс поверхностей.

В трехмерном случае многообразия Фано не получается связать проекциями как в случае размерности два, хотя бы потому, что трехмерные многообразия Фано могут не быть бирационально эквивалентны. Однако визуально, с точки зрения численных инвариантов, они имеют некоторую структуру, образуя серии, такие как серии многообразия Фано основной серии индекса один. Поэтому возникает идея связать простейшими проекциями если не сами многообразия Фано, то хотя бы их торические вырождения. Такие вырождения чаще всего определяют семейство многообразий Фано; однако в трехмерном случае одно и то же вырождение может быть у разных многообразий. В этом случае конкретное многообразие определяет не само вырождение, а соответствующая ему торическая модель Ландау–Гинзбурга; разные многочлены Лорана (типа Минковского) определяют разные семейства сглаженных многообразий Фано. Эта часть посвящена изучению связи между различными

многообразиями Фано через элементарные проекции между их торических вырождениями. Параграф 8.1 посвящен двумерному случаю; в частности, в нем проекциями получены все канонические торические поверхности дель Пеццо, торические модели Ландау–Гинзбурга для которых изучались в параграфе 3.1. В параграфе 8.2 мы связываем проекциями вырождений гладкие трехмерные многообразия основной серии. Подобным образом можно связать все гладкие трехмерные многообразия Фано с очень обильным антиканоническим классом, однако это делается также, как и в случае ранга Пикара 1, и отличается от него лишь громоздкостью, см. [IKKPS].

8.1. ТОРИЧЕСКИЕ БАЗОВЫЕ ЛИНКИ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕЛЬ ПЕЦЦО

Антиканоническая линейная система $|-K_{\mathbb{P}^2}|$ задает вложение $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^9$. Ее образом является поверхность степени 9, которую мы обозначаем через S_9 . Пусть $\pi: S_9 \dashrightarrow S_8$ — бирациональное отображение, индуцированное линейной проекцией $\mathbb{P}^9 \dashrightarrow \mathbb{P}^8$ из точки на S_9 (центра проекции), где S_8 является поверхностью степени 8 в \mathbb{P}^8 , полученной как образ поверхности S_9 при этой проекции. Для простоты будем говорить, что π_9 является проекцией поверхности S_9 из точки. Мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S}_9 & \\ \alpha_9 \swarrow & & \searrow \beta_9 \\ S_9 & \dashrightarrow \pi_9 \dashrightarrow & S_8, \end{array}$$

где α_9 — раздутие гладкой точки на поверхности S_9 , а β_9 — бирациональный морфизм, определяемый линейной системой $|-K_{\tilde{S}_9}|$. Заметим, что S_8 — это поверхность дель Пеццо и $(-K_{S_8})^2 = 8$.

Итерируя этот процесс и беря гладкие точки полученных поверхностей S_i как центры проекций, мы получим следующую последовательность проекций:

$$(8.1) \quad \mathbb{P}^2 = S_9 \xrightarrow{\pi_9} S_8 \xrightarrow{\pi_8} S_7 \xrightarrow{\pi_7} S_6 \xrightarrow{\pi_6} S_5 \xrightarrow{\pi_5} S_4 \xrightarrow{\pi_4} S_3,$$

в которой каждая поверхность S_i является поверхностью дель Пеццо с каноническими особенностями, например, S_3 является кубической поверхностью с изолированными особенностями в \mathbb{P}^3 , которая не является конусом. Заметим, что мы должны закончить процесс при $i = 3$, так как проекция кубики S_3 из гладкой точки на ней дает рациональное отображение степени 2.

Для каждой построенной проекции $\pi_i: S_i \dashrightarrow S_{i-1}$ мы получаем коммутативную диаграмму

$$(8.2) \quad \begin{array}{ccc} & \tilde{S}_i & \\ \alpha_i \swarrow & & \searrow \beta_i \\ S_i & \dashrightarrow \pi_i & S_{i-1}, \end{array}$$

в которой α_i является раздутием гладкой точки на поверхности S_i , а β_i — бирациональный морфизм, задающийся линейной системой $| -K_{\tilde{S}_i} |$. Будем называть диаграмму (8.2) *базовым линком* между поверхностями дель Пеццо.

Вместо \mathbb{P}^2 можно использовать неприводимую квадрику в качестве корня последовательности проекций. Таким образом мы получим все поверхности дель Пеццо с каноническими особенностями, кроме \mathbb{P}^2 , квадратичного конуса, квартики в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, и секстики в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$. Заметим, что поверхность S_3 не является пересечением квадрик (то есть является тригональной), антиканоническая линейная система каждой квадрики в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ с каноническими особенностями — морфизм, не являющийся вложением (то есть поверхность является гиперэллиптической), а антиканоническая линейная система каждой секстики в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ имеет единственную базисную точку.

Зафиксируем действие тора $(\mathbb{C}^*)^2$ на \mathbb{P}^2 . Если вместо того, чтобы брать в качестве центров проекций гладкие точки, мы будем брать торические гладкие точки (фиксируя действие тора), то построенная последовательность проекций (8.1) и коммутативная диаграмма (8.2) также будут торическими. В таком случае мы будем говорить, что диаграмма (8.2) является *торическим*

базовым линком между торическими поверхностями дель Пеццо. Напомним, что существует в точности 16 торических поверхностей дель Пеццо с каноническими особенностями. На самом деле мы можем явно описать все возможные торические проекции торических поверхностей дель Пеццо из их гладких торических точек (что является чисто комбинаторной задачей), что даст полное описание всех торических базовых линков между торическими поверхностями дель Пеццо. Самым простым способом это сделать является использование рефлексивных многоугольников. Это описание представлено в рисунке 4.

В параграфе 3.1 мы каждой поверхности дель Пеццо и дивизору на ней сопоставили торическую модель Ландау–Гинзбурга. Заметим, что метод такого сопоставления согласован с торическими базовыми линками.

8.2. ТОРИЧЕСКИЕ БАЗОВЫЕ ЛИНКИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО С КАНОНИЧЕСКИМИ ГОРЕНШТЕЙНОВЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

По аналогии с двумерным случаем естественной кажется идея определить несколько конкретных типов базовых линков между трехмерными многообразиями Фано с каноническими горенштейновыми особенностями (слова конкретный тип линков означают, что они должны иметь геометрическое описание, такое как проекции из точек или кривых малой размерности) и связать все такие многообразия базовыми линками. Однако это невозможно, что демонстрирует следующий пример.

Пример 8.3 (Исковских–Манин). Трехмерное многообразие Фано с каноническими особенностями бирационально гладкой квартике, только если оно само является гладкой квартикой (см. [IM71] и [Ch03]).

Однако, как и в случае поверхностей, если мы интересуемся классификацией с точностью до деформаций, то мы можем определить небольшой набор конкретных *базовых линков* между трехмерными многообразиями Фано с

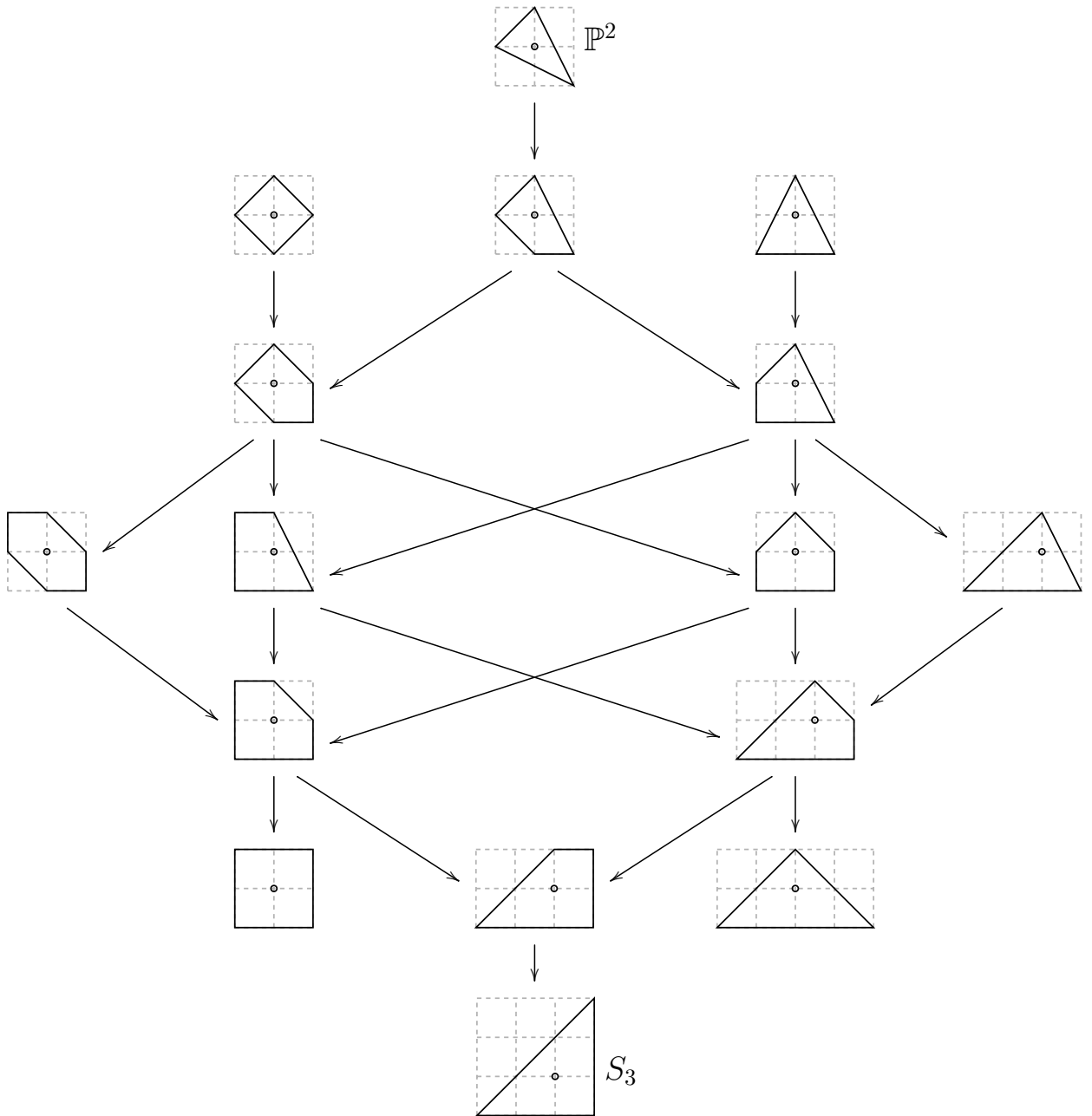


Рис. 4. Дерево дель Пеццо

каноническими горенштейновыми особенностями и описать все *деформационные типы* таких многообразий, используя эти линки. Более того, разумно ожидать, что этот подход позволит единообразно получить все гладкие трехмерные многообразия Фано.

Определим трехмерные базовые линки по аналогии с двумерными. А именно, рассмотрим трехмерное многообразие Фано X с каноническими горенштейновыми особенностями. Положим $g = K_X^3/2 + 1$. Тогда g является

положительным целым числом и $h^0(\mathcal{O}_X(-K_X)) = g + 1$. Пусть $\varphi_{|-K_X|}: X \rightarrow \mathbb{P}^{g+1}$ — отображение, заданное системой $|-K_X|$. Тогда

- (i) либо $\text{Bs}|-K_X| \neq \emptyset$, и все такие многообразия найдены в [JR06],
- (ii) либо отображение $\varphi_{|-K_X|}$ не является вложением (такие многообразия называются гиперэллиптическими), и все такие многообразия найдены в [CPS05],
- (iii) либо отображение $\varphi_{|-K_X|}$ является вложением, но $\varphi_{|-K_X|}(X)$ не является пересечением квадратик (такие многообразия называются тригональными), и все такие многообразия найдены в [CPS05],
- (iv) либо $\varphi_{|-K_X|}(X)$ является пересечением квадратик.

Таким образом, мы всегда можем предполагать, что отображение $\varphi_{|-K_X|}$ является вложением, а $\varphi_{|-K_X|}(X)$ является пересечением квадратик. Мы будем отождествлять X с его антиканоническим образом $\varphi_{|-K_X|}(X)$.

Пусть Z — либо гладкая точка на X , либо терминальная точка типа cDV (см. [Re87]) на X , либо прямая на $X \subset \mathbb{P}^{g+1}$, не проходящая через не-cDV точку, либо гладкая неприводимая коника на $X \subset \mathbb{P}^{g+1}$ не проходящая через не-cDV точку. Обозначим через $\alpha: \tilde{X} \rightarrow X$ раздутие пучка идеалов подмногообразия $Z \subset X$.

Лемма 8.4. *Предположим, что Z является либо точкой типа cDV, либо прямой. Тогда система $|-K_{\tilde{X}}|$ не имеет базисных точек.*

Доказательство. Это следует из предположения, что $\varphi_{|-K_X|}(X)$ является вложением. □

Если Z является гладкой точкой, обозначим через $\beta: X \rightarrow X'$ морфизм, задающийся системой $|-K_{\tilde{X}}|$.

Лемма 8.5. *Предположим, что Z является либо точкой типа cDV , либо прямой. Тогда морфизм β бирационален, и X' является многообразием Фано с каноническими горнштейновыми особенностями, таким что антиканонический класс $-K_{X'}$ очень обилен.*

Доказательство. Требуемое утверждение следует из того факта, что X является пересечением квадрик. □

Если Z является коникой, то нам необходимо наложить некоторые условия на X и Z (ср. [Та89, Theorem 1.8]), чтобы гарантировать, что морфизм β бирационален, а X' является многообразием Фано с каноническими горнштейновыми особенностями, таким что антиканонический класс $-K_{X'}$ очень обилен. В торическом случае эти условия легко проверить.

Обозначим через $\pi: X \dashrightarrow X'$ проекцию с центром в Z . Если Z не является гладкой точкой, то диаграмма

$$(8.6) \quad \begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \overset{\pi}{\dashrightarrow} & X' \end{array}$$

коммутативна. К сожалению, если Z является гладкой точкой, то диаграмма (8.6) не является коммутативной. В этом случае мы должны определить базовый линк между трехмерными многообразиями Фано несколько иным путем. А именно, если Z является гладкой точкой, нам необходимо рассмотреть коммутативную диаграмму (8.6), в которой π является проекцией из проективного касательного пространства к X в точке Z (вместо проекции из Z как в остальных случаях). Более того, если Z является гладкой точкой, то, аналогично со случаем, когда Z является коникой, нам необходимо наложить несколько дополнительных предположений на X и Z , чтобы гарантировать то, что морфизм β бирационален, X' является многообразием Фано с каноническими горнштейновыми особенностями, а антиканонический класс $-K_{X'}$

очень обилен. Эти условия легко проверить во многих случаях — в торическом случае и в случае индекса, большего 1, см. замечание 8.7.

Мы будем называть диаграмму (8.6) *базовым линком* между трехмерными многообразиями Фано типа

- Π_p , если Z является гладкой точкой,
- Π_{dp} , (или Π_o или Π_{cdv} соответственно) если Z является двойной точкой (обыкновенной двойной точкой или не обыкновенной двойной точкой соответственно),
- Π_1 , если Z является прямой и
- Π_c , если Z является коникой.

Более того, во всех случаях мы называем Z *центром* базового линка (8.6) или *центром проекции* π .

Замечание 8.7. Пусть Z является гладкой точкой, а $-K_X \sim 2H$ для некоторого обильного дивизора Картье H . Положим $d = H^3$. Тогда линейная система $|H|$ определяет рациональное отображение $\varphi_{|H|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{d+1}$ (что следует из теоремы Римана–Роха и теорем об обращении в ноль). Если отображение $\varphi_{|H|}$ не является вложением, то есть если H не очень обилен, то X может быть явно описано в точности так же, как и в гладком случае (см. [IP99]). А именно, можно показать, что X является либо гиперповерхностью степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$, либо гиперповерхностью степени 4 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$. Аналогично, если H очень обилен и $\varphi_{|H|}(X)$ не является пересечением квадрик в \mathbb{P}^{d+1} , то X является просто кубической гиперповерхностью в \mathbb{P}^4 . Предполагая, что $\varphi_{|H|}(X)$ является пересечением квадрик в \mathbb{P}^{d+1} (что эквивалентно тому, что $(-K_X)^3 > 24$) и отождествляя X с его образом $\varphi_{|H|}(X)$ в \mathbb{P}^{d+1} , мы видим,

что существует коммутативная диаграмма

$$(8.8) \quad \begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \overset{\pi}{\dashrightarrow} & X', \end{array}$$

в которой $\pi: X \dashrightarrow X'$ является проекцией многообразия $X \subset \mathbb{P}^{d+1}$ из точки Z . Тогда X' является трехмерным многообразием Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, индекс Фано которого также делится на 2.

По аналогии с двухмерным случаем, мы можем взять \mathbb{P}^3 или неприводимую квадрику в \mathbb{P}^3 и начать применять базовые линки один за другим. Это даст нам все (или почти все) деформационные типы трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, очень обильным антиканоническим классом и антиканонической степени не более 64 (антиканоническая степень при базовых линках убывает).

Пусть X — трехмерное торическое многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями. Зафиксируем действие тора $(\mathbb{C}^*)^3$ на X . Предположим, что $-K_X$ очень обилен, а X не тригонально. Тогда мы можем отождествить X с его антиканоническим образом в \mathbb{P}^{g+1} , где $g = (-K_X)^3/2 + 1$ (это число обычно называется родом многообразия X). Пусть Z тор-инвариантно. Если Z не является гладкой точкой многообразия X , то диаграмма (8.6) также является тор-инвариантной, и мы будем называть базовый линк (8.6) *торическим*. Это дает нам три типа торических базовых линков: Π_{dp} , если Z является двойной точкой (Π_o , если Z является обыкновенной двойной точкой, и Π_{cdv} , если Z не является обыкновенной двойной точкой), Π_l , если Z является прямой, и Π_c , если Z является коникой. В том случае, когда Z является гладкой тор-инвариантной точкой, мы будем действовать как в замечании 8.7, получая торический базовый линк типа Π_p , предполагая, что индекс Фано многообразия X делится на 2 или 3 и $(-K_X)^3 > 24$.

Возьмем $X = \mathbb{P}^3$ и начнем применять базовые линки, пока мы не получим торическое многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, к которому мы не можем применить торический базовый линк (например, когда мы получим торическую квартику в \mathbb{P}^4). Это даст бирациональные отображения между большинством трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, антиканоническая степень которых не больше 64. Аналогично, мы можем взять неприводимую квадрику в \mathbb{P}^4 , сделав картину более полной. Более того, мы можем начать с многообразий $X = \mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$ или $X = \mathbb{P}(1, 1, 4, 6)$, которые имеют наибольшую степень среди трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями (см. [Pro05]), а также с $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, чтобы получить все торические многообразия Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, см. [IKKPS].

Нас будут интересовать торические многообразия Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, допускающие сглаживания к многообразиям Фано с группой Пикара \mathbb{Z} . Тогда, стартуя с \mathbb{P}^3 и с квадрики \mathbb{P}^4 с одной обыкновенной двойной точкой и рассматривая некоторые конкретные торические базовые линки, мы получим диаграмму на рисунке 5.

Изучим теперь торические модели Ландау–Гинзбурга, получаемые с помощью торических базовых линков из \mathbb{P}^3 и квадрики. Таблица 3 устроена следующим образом. Номер многообразия в таблице обозначен через N . “Мног.” обозначает номер соответствующего гладкого многообразия Фано. Степень многообразия находится в столбце, помеченном “deg.”. В столбце “Род.” отмечены “родители” — многообразия, из которых рассматриваемое многообразие получается с помощью базовых линков. “БЛ” обозначает тип базового линка. “Пот.” обозначает “потомков” — возможные образы торических базовых линков. Наконец, последний столбец содержит сами торические модели Ландау–Гинзбурга. Коэффициенты многочленов Лорана, связанных базовым

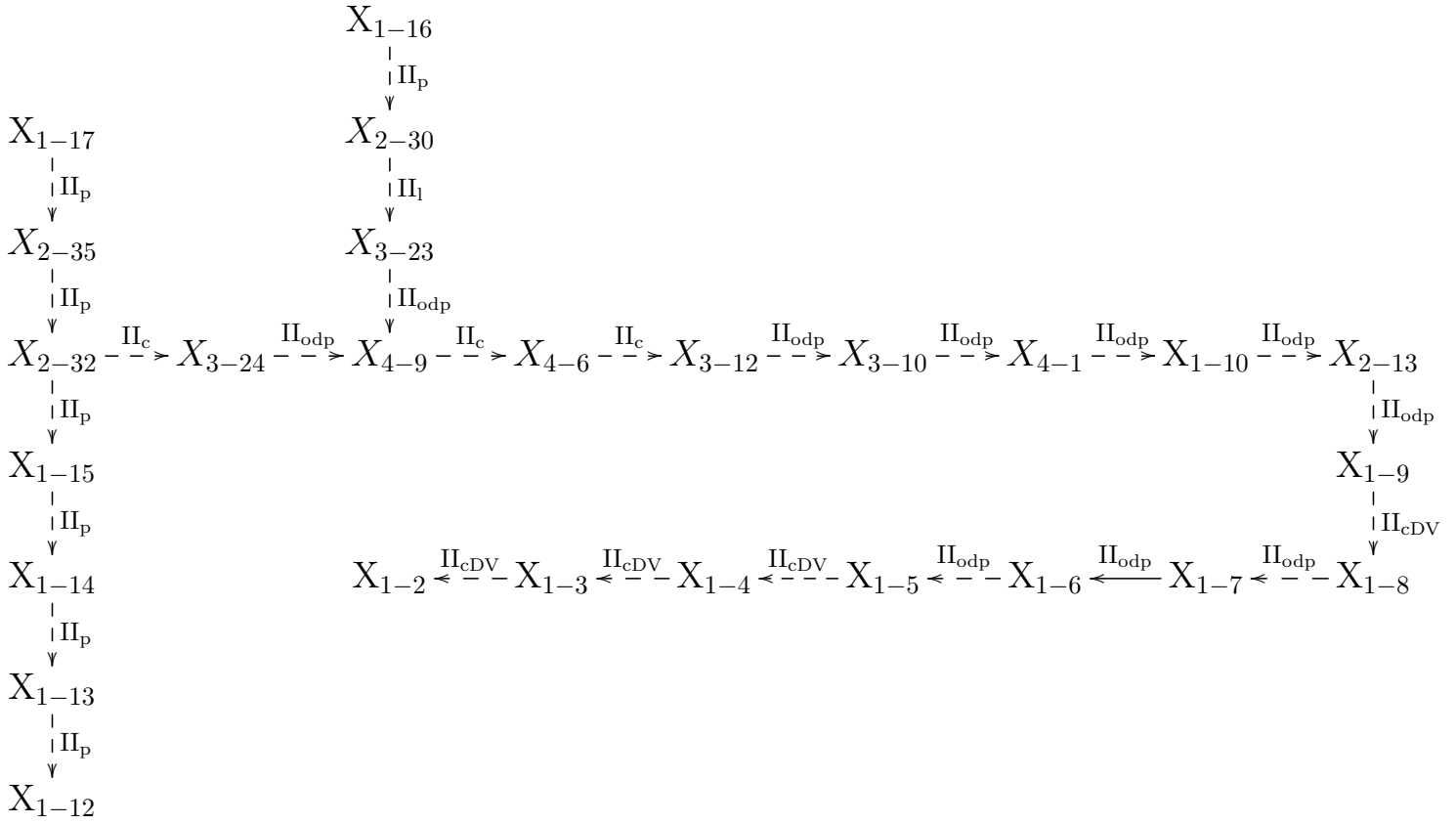


Рис. 5. Змея многообразий Фано

линком, согласованы между собой. Исключением является многообразие номер 14, для которого мы сделали торическую замену координат $\frac{y}{x} \rightarrow y$, $\frac{z}{y} \rightarrow z$ и многообразие номер 23, для которого также сделана торическая замена координат.

N	Мног.	deg.	Род.	БЛ	Пот.	Торические модели ЛГ
1	1-17	$2^3 \cdot 8$	\emptyset	\emptyset	2	$x + y + z + \frac{1}{xyz}$
2	2-35	$2^3 \cdot 7$	1	Π_p	3	$x + y + z + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{x}$
3	2-32	$2^3 \cdot 6$	2	Π_p	5, 9	$x + y + z + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
4	3-27	$2^3 \cdot 6$	\emptyset	\emptyset	5	$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$
5	1-15	$2^3 \cdot 5$	3, 4	Π_p, Π_p	6	$x + y + z + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$
6	1-14	$2^3 \cdot 4$	5	Π_p	7	$x + y + z + \frac{1}{xyz} + \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{yz}{x}$
7	1-13	$2^3 \cdot 3$	6	Π_p	8	$x + y + 2z + \frac{1}{xyz} + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}$

N	Мног.	deg.	Род.	БЛ	Пот.	Торические модели ЛГ
8	1-12	$2^3 \cdot 2$	7	Π_p	\emptyset	$2x + 2y + 2z + \frac{1}{xyz} + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z}$
9	3-24	42	3	Π_c	10	$x + y + z + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz}$
10	4-9	40	9, 27	Π_o, Π_o	11	$x + y + z + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xy}$
11	4-6	34	10	Π_c	12	$x + y + z + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} + yz$
12	3-12	28	11	Π_c	13	$x + y + z + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} + yz + xy$
13	3-10	26	12	Π_o	14	$x + y + z + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} + yz + xy + \frac{1}{z}$
14	4-1	24	13	Π_o	15	$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$
15	1-10	22	14	Π_o	16	$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{yz}$
16	2-13	20	15	Π_o	17	$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz}$
17	1-9	18	16	Π_o	18	$x + y + z + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}$
18	1-8	16	17	Π_{cDV}	19	$x + y + z + \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{xz}$
19	1-7	14	18	Π_o	20	$x + y + z + \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} + \frac{x}{y} + \frac{2x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{2y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{xz} + \frac{xy}{z}$
20	1-6	12	19	Π_o	21	$2x + y + z + \frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} + \frac{2x}{y} + \frac{2x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{2y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{2z}{y} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{xz} + \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y}$
21	1-5	10	20	Π_o	22	$2x + 2y + 2z + \frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} + \frac{2x}{y} + \frac{2x}{z} + \frac{2y}{x} + \frac{2y}{z} + \frac{2z}{x} + \frac{2z}{y} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{xz} + \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}$
22	1-4	8	21	Π_{cDV}	23	$4x + 4y + 4z + \frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} + \frac{2x}{y} + \frac{2x}{z} + \frac{2y}{x} + \frac{2y}{z} + \frac{2z}{x} + \frac{2z}{y} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{xz} + \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} + xyz + 2xy + 2xz + 2yz$
23	1-3	6	22	Π_{cDV}	24	$\frac{(y+z+1)^2((y+z+1)^2+2x(y+z+1)+x^2)}{xyz} - 12$
24	1-2	4	23	Π_{cDV}	\emptyset	$\frac{(x+y+z+1)^4}{xyz}$
25	1-16	54	\emptyset	\emptyset	26	$x + y + z + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz}$
26	2-30	46	27	Π_p	27	$x + y + z + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xyz}$
27	3-23	42	28	Π_1	10	$x + y + z + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{x}$

Таблица 3: Торические модели Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано

Предложение 8.9 (см. [IV09, Theorem 2.8]). Рассмотрим многочлен Лорана $p_1 = xg_1g_2 + g_3 + g_4/x$, где g_i — многочлены Лорана, не зависящие от x . Пусть $p_2 = xg_1 + g_3 + g_2g_4/x$. Пусть T_i — торическое многообразие, такое что $F(T_i) = N(p_i)$. Тогда многообразие T_2 вырождается к T_1 .

Пример 8.10. Рассмотрим многочлен Лорана

$$p_1 = xy + xz + xyz + x/y + x/z + x + 1/x,$$

который является торической моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия X_{2-35} . Заметим, что

$$p_1 = x(z + z/y + 1)(y + 1/z) + 1/x.$$

Поэтому, по предложению 8.9, торическое многообразие T_{p_1} может быть деформировано к торическому многообразию T_{p_2} для

$$p_2 = x(z + z/y + 1) + (y + 1/z)/x,$$

который, после мономиальной замены переменных, совпадает с многочленом из второй строки таблицы 3. В частности, T_{p_1} сглаживается до X_{2-35} .

Многообразие T_{p_1} является ни чем иным, как конусом над торической поверхностью дель Пеццо степени 7 (самой левой в третьей строке рисунка 4). Рассмотрим торический базовый линк, являющийся проекцией из гладкой точки на T_{p_1} . Мы получим торическое многообразие — конус над торической поверхностью дель Пеццо, соответствующей самому левому многоугольнику в четвертой строке рисунка 4. Оно имеет два сглаживания, соответствующих двум разложениям многоугольника по Минковскому. Более того, имеется две торические модели Ландау–Гинзбурга, многогранниками Ньютона которых является верный многогранник этого конуса, а именно

$$p_3 = xy + xz + xyz + x/y + x/z + x/y/z + 2x + 1/x$$

и

$$p_4 = xy + xz + xyz + x/y + x/z + x/y/z + 3x + 1/x.$$

Первая из них соответствует многообразию X_{2-32} , а вторая — многообразию X_{3-27} . Действительно, заметим, что

$$p_3 = x((yz + 1)/z/y)(y + 1)(z + 1) + 1/x$$

и

$$p_4 = x((yz + z + 1)/y/z)(yz + y + 1) + 1/x.$$

После замены переменных кластерного типа по предложению 8.9 мы получим два многочлена, соответствующих в таблице 3 многообразиям X_{2-32} и X_{3-27} . Тем не менее, правильным прообразом рассматриваемого торического базового линка является многообразие X_{2-32} , так как проектируя общее многообразие $X_{2,32}$ из точки, мы получим именно $X_{3,27}$.

Замечание 8.11. Многообразие номер 24, то есть торическая квартика, является тригональной, и из нее нет базовых линков. Однако оно имеет 4 особые канонические (тройные) точки, из которых мы можем спроектировать. Другими словами, мы можем спроектировать квартику

$$\{x_1x_2x_3x_4 = x_0^4\} \subset \mathbb{P}[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$$

из точки, скажем $(0 : 0 : 0 : 0 : 1)$. Очевидно, что мы получим снова многообразие номер **1**, то есть \mathbb{P}^3 .

Суммируя результаты, которые мы обсуждали в этой части, мы получим следующее.

Теорема 8.12 (ср. [ИККПС]). *Все поверхности дель Пеццо связаны базовыми линками. Все торические базовые линки приведены на рисунке 4.*

Трёхмерные многообразия Фано основной серии связаны торическими базовыми линками. Эти линки приведены на рисунке 5. Базовые линки согласованы с элементарными перестройками (добавлением монома и возможного изменения коэффициентов соседних мономов) их торических моделей Ландау–Гинзбурга. Базовые линки определяют сглаживание образов проекций.

Часть 9. Неф-разбиения

Важным ингредиентом в конструкции Гивенталья из параграфа 5.1 для полных пересечений в торических многообразиях и ее обобщений было существование неф-разбиения для такого полного пересечения. Такие неф-разбиения существуют для полных пересечений в проективных пространствах (см. параграф 5.2) и, более общо, в грассманианах (см. параграф 6.1). Однако в общем случае существование такого неф-разбиения не гарантировано. С классификационной точки зрения самыми интересными многообразиями Фано являются многообразия с группой Пикара \mathbb{Z} . Если полное пересечение в торическом многообразии обладает таким свойством, то торическое многообразие является взвешенным проективным пространством (или его фактором). В общем случае существование неф-разбиения для полного пересечения во взвешенном проективном пространстве не доказано, хотя и ожидается.

Гипотеза 9.1. *Гладкое хорошо сформированное полное пересечение во взвешенном проективном пространстве имеет хорошее неф-разбиение и торическую модель Ландау–Гинзбурга (определения см. ниже).*

Докажем существование (очень) хороших неф-разбиений для случая гладких полных пересечений дивизоров Картье и случая коразмерности не больше двух.

Замечание 9.2. Существование хорошего (см. определение 9.7) неф-разбиения гарантирует существование слабой модели Ландау–Гинзбурга (см. параграф 5.2), для которых выполнено торическое условие (см. параграф 5.4). Во многих случаях, по аналогии с теоремой 5.19, можно проверить и условие Калаби–Яу, то есть то, что эта модель Ландау–Гинзбурга торическая; основным препятствием для этого является то, что в общем случае многогранник Ньютона такой модели не является рефлексивным.

В параграфе 9.3 мы найдем все неф-разбиения и соответствующие им слабые модели Ландау–Гинзбурга для гладких взвешенных пересечений Фано размерностей 4 и 5, что дает еще одно свидетельство в пользу гипотезы 9.1.

9.1. НЕФ-РАЗБИЕНИЯ ДЛЯ ПОЛНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ДИВИЗОРОВ КАРТЬЕ

Наибольший общий делитель чисел $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N}$ мы будем обозначать через (a_1, \dots, a_r) .

Напомним некоторые факты о взвешенных проективных пространствах. Более подробно см. в [Do82].

Определение 9.3 (см. [IF00, Definition 5.11]). Взвешенное проективное пространство \mathbb{P} называется *хорошо сформированным*, если наибольший общий делитель любых n весов w_i равен 1.

Любое взвешенное проективное пространство изоморфно хорошо сформированному, см. [Do82, 1.3.1].

Лемма 9.4 (см. [IF00, 5.15]). *Особым множеством пространства \mathbb{P} является объединение стратов*

$$\Lambda_J = \{(x_0 : \dots : x_n) \mid x_j = 0 \text{ для всех } j \notin J\}$$

для всех подмножеств $J \subset [0, n]$, таких что наибольший общий делитель весов w_j для $j \in J$ больше 1.

Определение 9.5 (см. [IF00, Definition 6.9]). Подмногообразие $X \subset \mathbb{P}$ размерности k называется *хорошо сформированным*, если \mathbb{P} хорошо сформировано и

$$\text{codim}_X (X \cap \text{Sing } \mathbb{P}) \geq 2.$$

Определение 9.6. Нули (взвешенного) однородного многочлена

$$f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n],$$

где $\text{wt}(x_i) = w_i$, взвешенной степени d называются *гиперповерхностью степени d* в $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$.

Так как ранг группы дивизоров Вейля взвешенного проективного пространства равен 1, любой эффективный дивизор Вейля можно задать как нули некоторого взвешенного однородного многочлена. Его степень называется степенью дивизора. Легко видеть, что дивизор Вейля степени d является дивизором Картье тогда и только тогда, когда все веса w_i делят d .

Особенностями общего пересечения $X = X_1 \cap \dots \cap X_k$ дивизоров Картье X_1, \dots, X_k является пересечение многообразия X с особенностями пространства \mathbb{P} . Поэтому X гладко тогда и только тогда, когда максимальная коразмерность стратов особенностей пространства \mathbb{P} меньше, чем k . Это значит, что $(w_{i_1}, \dots, w_{i_{k+1}}) = 1$ для любого набора весов $w_{i_1}, \dots, w_{i_{k+1}}$ (ср. [Di86]).

Пусть $\deg X_i = d_i$. Каноническим пучком многообразия X является пучок $\mathcal{O}(d_1 + \dots + d_k - w_0 - \dots - w_n)|_X$. Поэтому X является многообразием Фано тогда и только тогда, когда $\sum d_i < \sum w_j$.

Определение 9.7. Пусть X является гладким полным пересечением дивизоров Картье степеней d_1, \dots, d_k в хорошо сформированном взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$. Напомним, что разбиение множества $[0, n]$ на k непересекающихся подмножества $I_0, \dots, I_k \subset [0, n]$, таких что $d_i = \sum_{j \in I_i} w_j$ для всех $i > 0$, называется неф-разбиением. Неф-разбиение называется *хорошим*, если существует индекс $j \in I_0 = [0, n] \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_k)$, такой что $w_j = 1$. Хорошее неф-разбиение называется *очень хорошим*, если $w_j = 1$ для всех $j \in I_0$.

Предложение 9.8. Пусть X является гладким полным пересечением дивизоров Картье степеней d_1, \dots, d_k в хорошо сформированном взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$. Пусть X является многообразием Фано. Тогда для него существует очень хорошее неф-разбиение.

Доказательство. Упорядочивая веса по возрастанию, из условия того, что полное пересечение является пересечением дивизоров Картье, является многообразием Фано и является гладким, мы имеем следующие численные условия на веса и степени:

$$w_0 \leq w_1 \leq \dots \leq w_n,$$

$$w_j | d_i, \quad j = 0 \dots n, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\sum d_i < \sum w_i,$$

$$(w_{i_1}, \dots, w_{i_{k+1}}) = 1, \quad \{i_1, \dots, i_{k+1}\} \subset \{0, \dots, n\}.$$

Применим следующий “процесс редукции”. Пусть простое число p делит один из весов. Разделим на p все степени и веса, которые делятся на p . С точностью до упорядочивания весов мы получим набор степеней и весов, удовлетворяющий приведенным выше условиям. Будем повторять этот процесс, пока все веса не станут равными 1. Рассмотрим k непересекающихся подмножества I_1, \dots, I_k множества $[0, n]$, мощности которых равны степеням, полученным на последнем шаге. Пусть, как и раньше, $I_0 = [0, n] \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_k)$.

Обозначим число $\sum w_j$, $w_j \in I_i$, через $|I_i|$. Начнем процесс редукции в обратном направлении. Веса и степени на каждом шаге меняются. Поменяем элементы множеств I_0 и I_i на первом шаге обращенного процесса так, что каждое подмножество I_i содержит самое большее один индекс для веса, который возрастает на этом шаге, а I_0 не содержит таких индексов. Будем менять на каждом шаге множества I_0 и I_i следующим образом. Если $|I_i| = d_i$ (где d_i — степени на этом шаге), мы не будем ничего делать. Если $|I_i| < d_i$, добавим индексы из множества I_0 , веса которых возрастают, к множеству I_i (легко проверить, что число $d_i - |I_i|$ не меньше, чем простое число, p на которое мы увеличиваем). Так как число увеличивающихся весов не больше, чем k , множество I_0 будет по-прежнему иметь индексы, соответствующие весам, равным 1. Получим $|I_i| \leq d_i$. Если $|I_i| < d_i$, то добавим к этому множеству

$d_i - |I_i|$ индексов из множества I_0 . Производя такие замены для множеств I и I_i на каждом шаге обращенного процесса, получим $|I_i| = d_i$, а также то, что веса для всех индексов, лежащих в I_0 , равны 1. Это и дает требуемое очень хорошее неф-разбиение. \square

Замечание 9.9. Обозначим через $d_0 = \sum w_i - \sum d_j$ индекс Фано многообразия X . Из доказательства предложения 9.8 легко видеть, что на самом деле как минимум $d_0 + 1$ весов равны 1. Это оценка точная: примером является гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$.

В качестве следствия мы получаем следующую теорему.

Теорема 9.10. *Каждое гладкое полное пересечение Фано дивизоров Картье в хорошо сформированном взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ имеет слабую модель Ландау–Гинзбурга, для которой выполнено торическое условие.*

Доказательство. Согласно предложению 9.8 и замечанию 9.9, для X существует такое неф-разбиение, что веса, соответствующие индексам из множества I_0 , равны 1. Значит, применив замену переменных, подобную замене из параграфа 5.2, мы получим многочлен Лорана вида (5.24). Простым комбинаторным подсчетом (или напрямую обобщив предложение 5.17 на случай взвешенных проективных пространств) получим, что для этих многочленов выполнено условие периодов. Кроме того, по теореме 5.25, для них выполнено и торическое условие. \square

Следствие 9.11. *Из теоремы 9.10 в частности следует, что гладкая гиперповерхность во взвешенном проективном пространстве задается дивизором Картье, а, значит, для нее существует очень хорошее неф-разбиение и слабая модель Ландау–Гинзбурга.*

Вопрос 9.12 (ср. теорему 9.15). *Похоже, что условие, требуемое для существования моделей Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья для полных пересечений Фано, можно ослабить. А именно, можно рассмотреть полное пересечение, не пересекающее особое множество взвешенного проективного пространства (это условие необходимо, так как иначе нужно будет рассматривать полное пересечение как орбифолд). На численном уровне это значит, что для любого числа $q > 1$ число весов, делящихся на q , не больше, чем число делящихся на q степеней. Это выполнено для всех рассматриваемых нами примеров, для которых также существует и хорошее неф-разбиение (см., например, таблицу 4 и таблицу 5). Всегда ли это верно?*

Замечание 9.13. В этом случае существует и (очень) хорошее неф-разбиение, а, значит, и слабая модель Ландау–Гинзбурга. Действительно, рассмотрим такое неф-разбиение. Уберем вес w_0 . Тогда выполнены все условия вопроса 9.12, так что опять существует подходящее неф-разбиение. Убирая таким образом вес за весом, мы получим требуемое хорошее неф-разбиение.

Замечание 9.14. Естественным кажется рассматривать модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья для квазигладких полных пересечений Фано. Однако даже для случая квазигладкой гиперповерхности Картье не всегда существует такая модель. Примером является гиперповерхность степени 30 в $\mathbb{P}(1, 6, 10, 15)$. Более того, даже если такая гиперповерхность имеет модель Ландау–Гинзбурга типа Гивенталья, ее не всегда можно представить слабой моделью Ландау–Гинзбурга. Примером является гиперповерхность степени 30 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 1, 6, 10, 15)$.

9.2. НЕФ-РАЗБИЕНИЯ ДЛЯ КОРАЗМЕРНОСТИ 2

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

Теорема 9.15. *Для гладкого хорошо сформированного полного пересечения существует очень хорошее неф-разбиение.*

Введем и изучим некоторые нужные нам для доказательства теоремы 9.15 понятия. Множество вершин графа Γ будем обозначать через $V(\Gamma)$.

Определение 9.16. *Взвешенным проективным графом, или WP-графом называется непустой неориентированный граф Γ без петель и кратных ребер, снабженный функцией веса*

$$\alpha_\Gamma: V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 2},$$

такой, что выполнены следующие условия:

- для любых двух вершин $v_1, v_2 \in V(\Gamma)$ существует ребро, соединяющее v_1 с v_2 в графе Γ , тогда и только тогда, когда числа $\alpha_\Gamma(v_1)$ и $\alpha_\Gamma(v_2)$ не взаимно просты;
- для любых трех вершин $v_1, v_2, v_3 \in V(\Gamma)$ числа $\alpha_\Gamma(v_1)$, $\alpha_\Gamma(v_2)$ и $\alpha_\Gamma(v_3)$ взаимно просты.

Мотивация для определения 9.16 следующая. Если хорошо сформированное взвешенное проективное пространство $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ таково, что любые три веса w_{i_1} , w_{i_2} и w_{i_3} взаимно просты, то мы можем построить WP-граф, вершины которого отмечены индексами i , такими что $w_i > 1$, и функция веса которого сопоставляет соответствующей вершине вес w_i . Мы будем использовать этот граф для описания особенностей пространства \mathbb{P} и полного пересечения в нем, см. доказательство теоремы 9.15.

Определение 9.17. Для WP-графа Γ определим $\Sigma\Gamma$ как сумму по всем вершинам v графа Γ чисел $\alpha_\Gamma(v)$ и $\text{lcm}\Gamma$ как наименьшее общее кратное чисел $\alpha_\Gamma(v)$ по всем вершинам v графа Γ .

Нашей целью является показать, что при некоторых условиях на WP-граф Γ выполнено $\text{lcm } \Gamma \geq \Sigma \Gamma$. Однако для произвольного WP-графа это не всегда выполнено.

Пример 9.18. Обозначим через $\Delta = \Delta(6, 10, 15)$ граф с тремя вершинами v_1, v_2 и v_3 и тремя ребрами, связывающими эти вершины. Положим

$$\alpha_{\Delta}(v_1) = 6, \quad \alpha_{\Delta}(v_2) = 10, \quad \alpha_{\Delta}(v_3) = 15,$$

см. рисунок 6. Тогда Δ является WP-графом с $\Sigma \Delta = 31$ и $\text{lcm } \Delta = 30$.

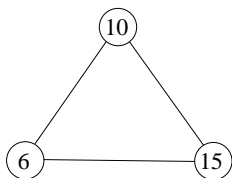


Рис. 6. WP-граф $\Delta(6, 10, 15)$

Замечание 9.19. Предположим, что WP-граф Γ содержит WP-подграф $\Delta(6, 10, 15)$. Тогда легко видеть, что граф $\Delta(6, 10, 15)$ является связной компонентой графа Γ , и такой подграф единственен.

Определение 9.20. Вершина v графа Γ называется *слабой*, если существует ребро, соединяющее ее с другой вершиной v' графа Γ , такая, что число $\alpha_{\Gamma}(v)$ делит $\alpha_{\Gamma}(v')$. Если вершина v не является слабой, она называется *сильной*.

Пример 9.21. Граф на рисунке 7 содержит три слабые вершины: одна веса 7 и две веса 17.

Из определений легко следует, что если вершина v WP-графа Γ слабая, то существует единственное ребро графа Γ , содержащее v . Ниже мы (неожиданно) увидим, что единственным WP-графом Γ без слабых вершин, таким что $\text{lcm } \Gamma < \Sigma \Gamma$, является граф $\Delta(6, 10, 15)$.

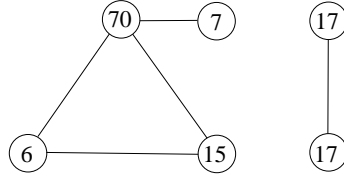


РИС. 7. Слабые и сильные вершины

Чтобы продолжать дальше, нам требуется следующее элементарное вычисление.

Лемма 9.22. *Выполнены следующие утверждения.*

- (i) *Рассмотрим положительные целые числа u_1, \dots, u_n , такие что по крайней мере одно из них больше 1, и положительные вещественные числа $t_1 \leq \dots \leq t_n$ и t , такие что*

$$t \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} t_i + t_n.$$

Тогда

$$t \prod_{i=1}^n u_i \geq \sum_{i=1}^n t_i u_i.$$

- (ii) *Пусть N и M — положительные целые числа, такие что $N \geq 4$ и $M \geq \lceil \frac{N-1}{2} \rceil$. Пусть w_1, \dots, w_M — попарно взаимно простые целые числа, большие 1. Тогда $\prod w_i \geq N$.*

Доказательство. Докажем утверждение (i). Положим $b = \prod u_i$ и предположим, что $u_{i_0} \geq 2$. Тогда $b \geq u_{i_0}$ и $b \geq 2u_i$ для всех $i \neq i_0$. Имеем

$$tb \geq \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} t_i + t_n \right) \cdot b \geq \left(\frac{1}{2} \sum_{i \neq i_0} t_i + t_{i_0} \right) \cdot b \geq \sum_{i \neq i_0} t_i u_i + t_{i_0} u_{i_0} = \sum_{i=1}^n t_i u_i.$$

Для доказательства утверждения (ii) можно предполагать, что $w_M \geq 2$ и $w_1 \geq \dots \geq w_{M-1} \geq 3$. Из этого следует, что

$$\prod w_i \geq 2 \cdot 3^{M-1} \geq 2 \cdot 3^{\lceil \frac{N-3}{2} \rceil}.$$

Последнее число не меньше N для $N \geq 4$, что легко проверить индукцией по N . \square

Лемма 9.23. Пусть Γ — связный WP-граф без слабых вершин. Выполнены следующие утверждения.

- (i) Если граф Γ имеет не более двух вершин, то $\text{lcm } \Gamma \geq \Sigma \Gamma$.
- (ii) Если граф Γ имеет три вершины, то $\text{lcm } \Gamma \geq \Sigma \Gamma - 1$ и $\text{lcm } \Gamma \geq \Sigma \Gamma$, если только Σ не является WP-графом $\Delta(6, 10, 15)$.

Доказательство. Если граф Γ имеет только одну вершину, то, очевидно, $\text{lcm } \Gamma = \Sigma \Gamma$.

Предположим, что граф Γ имеет две вершины v_1 и v_2 , и обозначим через a наибольший общий делитель чисел $\alpha_\Gamma(v_1)$ и $\alpha_\Gamma(v_2)$. Тогда $\alpha_\Gamma(v_1) = au_1$ и $\alpha_\Gamma(v_2) = au_2$, где целые числа u_1 и u_2 взаимно просты, оба числа u_1 и u_2 больше 1, и оба числа u_1 и u_2 взаимно просты с a . Можно предполагать, что $u_1 > u_2$. Имеем

$$\text{lcm } \Gamma = au_1u_2 \geq 2au_1 > au_1 + au_2 = \Sigma \Gamma.$$

Это доказывает утверждение (i).

Предположим теперь, что граф Γ имеет три вершины v_1 , v_2 и v_3 . Обозначим через w_{ij} наибольший общий делитель чисел $\alpha_\Gamma(v_i)$ и $\alpha_\Gamma(v_j)$ для $1 \leq i < j \leq 3$. Заметим, что числа w_{ij} и w_{kr} взаимно просты, за исключением случая $i = k$ и $j = r$. Имеем $\alpha_\Gamma(v_i) = w_{ij}w_{ik}u_i$. Тогда положительные целые числа u_i взаимно просты со всеми w_{kr} . Так как граф Γ связан, он имеет два или три ребра.

Предположим, что граф Γ имеет два ребра (то есть что одно из чисел w_{ij} равно 1). Можно предполагать, что вершина v_2 связана этими ребрами с вершинами v_1 и v_3 . Это значит, что оба числа w_{12} и w_{23} больше 1. Более того,

мы заключаем, что оба числа u_1 и u_3 больше 1, и как минимум одно из них больше 2. Отсюда следует неравенство

$$u_1 u_3 \geq u_1 + u_3 + 1.$$

Мы видим, что

$$\text{lcm } \Gamma = w_{12} w_{23} u_1 u_2 u_3 \geq w_{12} w_{23} u_2 (u_1 + u_3 + 1) \geq w_{12} u_1 + w_{12} w_{23} u_2 + w_{23} u_3 = \Sigma \Gamma.$$

Таким образом, можно предполагать, что все три числа w_{ij} больше 1, так что граф Γ имеет три ребра.

Предположим, что $u_i = 1$ для всех $1 \leq i \leq 3$. После перенумерования вершин можно предполагать, что $w_{12} \leq w_{13} \leq w_{23}$. Если $w_{12} > 2$, то

$$\text{lcm } \Gamma = w_{12} w_{13} w_{23} \geq 3 w_{13} w_{23} \geq w_{12} w_{13} + w_{12} w_{23} + w_{13} w_{23} = \Sigma \Gamma.$$

Если $w_{12} = 2$ и $w_{13} > 3$, то

$$\text{lcm } \Gamma = 2 w_{13} w_{23} \geq 4 w_{23} + w_{13} w_{23} \geq 2 w_{13} + 2 w_{23} + w_{13} w_{23} = \Sigma \Gamma.$$

Если $w_{12} = 2$, $w_{13} = 3$ и $w_{23} > 5$, то

$$\text{lcm } \Gamma = 6 w_{23} \geq 6 + 5 w_{23} = 6 + 2 w_{23} + 3 w_{23} = \Sigma \Gamma.$$

Единственным оставшимся случаем является случай весов $w_{12} = 2$, $w_{13} = 3$ и $w_{23} = 5$, то есть когда WP-граф Γ является графом $\Delta(6, 10, 15)$. В этом случае имеем

$$\text{lcm } \Gamma = 30 = \Sigma \Gamma - 1.$$

Рассмотрим теперь случай, когда как минимум одно из чисел u_i больше 1. Согласно приведенному выше рассуждению мы знаем, что либо

$$w_{12} w_{13} w_{23} \geq w_{12} w_{13} + w_{12} w_{23} + w_{13} w_{23},$$

либо $w_{12} = 2$, $w_{13} = 3$ и $w_{23} = 5$. В последнем случае мы видим, что

$$\begin{aligned} \text{lcm } \Gamma &= w_{12}w_{13}w_{23}u_1u_2u_3 \geq (w_{12}w_{13} + w_{12}w_{23} + w_{13}w_{23})u_1u_2u_3 \geq \\ &\geq w_{12}w_{13}u_1 + w_{12}w_{23}u_2 + w_{13}w_{23}u_3 = \Sigma\Gamma \end{aligned}$$

независимо от значения чисел u_i . В последнем случае имеем

$$\text{lcm } \Gamma = 30u_1u_2u_3 \geq 6u_1 + 10u_2 + 15u_3 = \Sigma\Gamma$$

по лемме 9.22(i), примененной к значениям параметров $n = 3$, $t_1 = 6$, $t_2 = 10$, $t_3 = 15$ и $t = 30$. Это доказывает утверждение (ii) и завершает доказательство леммы. \square

Лемма 9.24. *Пусть WP -граф Γ связан и не имеет слабых вершин. Предположим, что через каждую вершину графа Γ проходит как минимум два ребра. Предположим также, что число вершин N графа Γ равно как минимум 4. Тогда $\text{lcm } \Gamma \geq \Sigma\Gamma$.*

Доказательство. Обозначим через v_{max} вершину графа Γ , значение α_Γ для которой максимально. Обозначим через E множество ребер графа Γ , не содержащих вершину v_{max} . Легко видеть, что

$$|E| \geq \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil.$$

Для каждого ребра e , соединяющего вершины v_1 и v_2 графа Γ , через w_e обозначим наибольший общий делитель чисел $\alpha_\Gamma(v_1)$ и $\alpha_\Gamma(v_2)$. Заметим, что все числа w_e попарно взаимно просты, и все они больше 1. По лемме 9.22(ii) имеем

$$\text{lcm } \Gamma \geq \alpha_\Gamma(v_{max}) \cdot \prod_{e \in E} w_e \geq N\alpha_\Gamma(v_{max}) \geq \sum_{v \in V(\Gamma)} \alpha_\Gamma(v) = \Sigma\Gamma.$$

\square

Лемма 9.25. *Рассмотрим связный WP-граф Γ без слабых вершин. Предположим, что существует вершина v графа Γ , являющаяся вершиной единственного ребра графа Γ . Пусть Γ' — WP-граф, полученный из графа Γ выкидыванием вершины v и ребер, ее содержащих, а также ограничением функции веса на оставшиеся вершины. Предположим, что*

$$\text{lcm } \Gamma' \geq \Sigma \Gamma - 1.$$

Тогда

$$\text{lcm } \Gamma \geq \Sigma \Gamma.$$

Доказательство. Пусть v' — вершина графа Γ , связанная с вершиной v . Имеем $\alpha_{\Gamma}(v) = ab$ и $\alpha_{\Gamma}(v') = ac$, где a , b и c — взаимно простые положительные целые числа, а $a \geq 2$, см. рисунок 8.

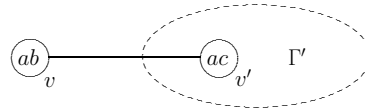


РИС. 8. Сильная вершина, содержащаяся в единственном ребре

Заметим, что $b \geq 2$ и $c \geq 2$, так как вершины v и v' сильные. Имеем

$$\text{lcm } \Gamma = b \text{lcm } \Gamma', \quad \Sigma \Gamma = ab + \Sigma \Gamma'.$$

Заметим также, что граф Γ' связан, так как граф Γ связан.

Предположим, что $\Sigma \Gamma' \geq ab + 2$. Тогда

$$\text{lcm } \Gamma = b \text{lcm } \Gamma' \geq 2 \text{lcm } \Gamma' \geq 2 \Sigma \Gamma' - 2 \geq \Sigma \Gamma' + ab = \Sigma \Gamma.$$

Теперь предположим, что $\Sigma \Gamma' \leq ab + 1$. Это невозможно, если $c > b$, так как $a \geq 2$. Таким образом, имеем $b \geq c$, что означает, что $b > c$, так как числа b и c взаимно просты. Отсюда

$$(b - 1)c \geq 2b - 2 \geq b + 1.$$

Заметим, что $\text{lcm } \Gamma' \geq ac$, а значит

$$\begin{aligned} \text{lcm } \Gamma = b \text{lcm } \Gamma' &= \text{lcm } \Gamma' + (b-1) \text{lcm } \Gamma' \geq \Sigma \Gamma' - 1 + (b-1)ac \geq \\ &\geq \Sigma \Gamma' - 1 + (b+1)a > \Sigma \Gamma' + ab = \Sigma \Gamma. \end{aligned}$$

□

Предложение 9.26. Пусть Γ — связный WP-граф без слабых вершин. Тогда

$$\text{lcm } \Gamma \geq \Sigma \Gamma - 1$$

и $\text{lcm } \Gamma \geq \Sigma \Gamma$, если только Γ не является WP-графом $\Delta(6, 10, 15)$.

Доказательство. Мы докажем утверждение леммы по индукции по числу N вершин графа Γ . По лемме 9.23 мы знаем, что утверждение леммы верно для $N \leq 3$. Если граф Γ имеет вершину, содержащуюся в единственном ребре графа Γ , то утверждение леммы следует по индукции из леммы 9.25. Таким образом, можно предполагать, что $N \geq 4$, и каждая вершина графа Γ содержится в как минимум двух ребрах графа Γ . Теперь утверждение леммы следует из леммы 9.24. □

Следствие 9.27. Рассмотрим WP-граф Γ , не содержащий слабых вершин. Предположим, что Γ не совпадает с WP-графом $\Delta(6, 10, 15)$. Тогда $\text{lcm } \Gamma \geq \Sigma \Gamma$.

Доказательство. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ — связные компоненты графа Γ . Тогда

$$(9.28) \quad \text{lcm } \Gamma = \prod_{i=1}^r \text{lcm } \Gamma_i, \quad \Sigma \Gamma = \sum_{i=1}^r \Sigma \Gamma_i.$$

Если связная компонента Γ_i не совпадает с WP-графом $\Delta(6, 10, 15)$, то $\text{lcm } \Gamma_i \geq \Sigma \Gamma_i$ по предложению 9.26. Таким образом, если ни одна из компонент Γ_i не совпадает с $\Delta(6, 10, 15)$, то утверждение сразу следует из (9.28).

Предположим, что одна из компонент Γ_i , скажем Γ_1 , совпадает с WP-графом $\Delta(6, 10, 15)$. Тогда $r \geq 2$, и ни одна из компонент $\Gamma_2, \dots, \Gamma_r$ не совпадает с $\Delta(6, 10, 15)$. Заметим, что $\Sigma\Gamma_i \geq 2$ (и, на самом деле, равна как минимум 7 для $2 \leq i \leq r$ из за условия взаимной простоты), так что

$$30 \prod_{i=2}^r \Sigma\Gamma_i \geq 31 + \prod_{i=2}^r \Sigma\Gamma_i \geq 31 + \sum_{i=2}^r \Sigma\Gamma_i.$$

Таким образом, из (9.28) следует, что

$$\text{lcm } \Gamma = 30 \prod_{i=2}^r \text{lcm } \Gamma_i \geq 30 \prod_{i=2}^r \Sigma\Gamma_i \geq 31 + \sum_{i=2}^r \Sigma\Gamma_i = \sum_{i=1}^r \Sigma\Gamma_i.$$

□

Определение 9.29. Рассмотрим положительные целые числа d_1, \dots, d_c . *Взвешенным графом полного пересечения* (или *WCI-графом*) *мультистепени* (d_1, \dots, d_c) называется WP-граф Γ , такой что выполнено следующее условие: для любого числа k и каждого выбора k вершин v_1, \dots, v_k графа Γ , для которых наибольший общий делитель δ чисел $\alpha_\Gamma(v_1), \dots, \alpha_\Gamma(v_k)$ больше 1, существует k чисел d_{s_1}, \dots, d_{s_k} , $1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq c$, наибольший общий делитель которых делится на δ . Число c называется *коразмерностью* WCI-графа Γ .

Мотивацией определения 9.29 является то, что гладкое взвешенное полное пересечение коразмерности 1 или 2 дает WCI-граф коразмерности 1 или 2 соответственно, и некоторые важные свойства взвешенного полного пересечения контролируются этим WCI-графом, подробности см. в доказательстве теоремы 9.15. Поэтому в этом параграфе нас будут в первую очередь интересовать WCI-графы коразмерности 1 или 2.

Замечание 9.30. Более точно было бы называть WCI-графом не просто WP-граф Γ , а набор, состоящий из Γ и мультистепени (d_1, \dots, d_c) . В частности, могут существовать несколько различных WCI-графов для одного и того же

графа Γ и различных мультистепеней и даже различных коразмерностей. Однако в этом параграфе мы будем иметь дело только с WCI-графами коразмерностей 1 и 2, и, в любом случае, мы не хотим усложнять обозначения и надеемся, что наше определение не внесет путаницы.

Лемма 9.31. *Пусть Γ — WCI-граф коразмерности 2 и бистепени (d_1, d_2) . Тогда множество вершин $V(\Gamma)$ является несвязным объединением*

$$V(\Gamma) = V_1 \sqcup V_2,$$

таким что полные подграфы Γ_1 и Γ_2 графа Γ с вершинами из множеств V_1 и V_2 являются WP-графами без слабых вершин, ни один из подграфов Γ_1 и Γ_2 не содержит связную компоненту $\Delta(6, 10, 15)$, и число $\text{lcm } \Gamma_i$ делит d_i .

Доказательство. Пусть $V' \subset V(\Gamma)$ — множество сильных вершин графа Γ , а $V'' = V(\Gamma) \setminus V'$ — множество слабых вершин. Если Γ не содержит подграф $\Delta(6, 10, 15)$, положим

$$V'_1 = \{v \in V' \mid \alpha_\Gamma(v) \text{ делит } d_1\}.$$

Если Γ содержит подграф $\Delta(6, 10, 15)$, то легко видеть, что оба числа d_1 и d_2 делятся на $\text{lcm } \Delta(6, 10, 15) = 30$. В этом случае положим

$$V'_1 = \{v \in V' \setminus V(\Delta(6, 10, 15)) \mid \alpha_\Gamma(v) \text{ делит } d_1\} \cup \{v_1\},$$

где v_1 является любой вершиной подграфа $\Delta(6, 10, 15)$. Положим $V'_2 = V' \setminus V'_1$. Из определения WCI-графа следует, что для каждой вершины $v \in V'_2$ число $\alpha_\Gamma(v)$ делит d_2 .

Для каждой слабой вершины v графа Γ обозначим через $\tau(v)$ единственную вершину графа Γ , связанную с v ребром. Из определения WP-графа следует, что либо $\alpha_\Gamma(\tau(v)) > \alpha_\Gamma(v)$, так что вершина $\tau(v)$ графа Γ является сильной, либо $\alpha_\Gamma(\tau(v)) = \alpha_\Gamma(v)$, так что обе вершины v и $\tau(v)$ слабые. В последнем случае вершины v и $\tau(v)$ вместе с соединяющих их ребром образуют

связную компоненту графа Γ (заметим, что вершины v и $\tau(v)$ вместе с соединяющим их ребром могут образовывать связную компоненту графа Γ также и в том случае, когда вершина $\tau(v)$ сильная). Первый вид вершин мы будем называть *слабыми вершинами первого типа*, а второй — *слабыми вершинами второго типа*. В обоих случаях из определения WCI-графа следует, что степени d_1 и d_2 делятся на $\alpha_\Gamma(v)$. Обозначим через V_1'' множество всех слабых вершин первого типа, таких что $\tau(v) \in V_2'$, а через V_2'' — множество слабых вершин первого типа, таких что $\tau(v) \in V_1'$. Наконец, через \tilde{V}_1'' и \tilde{V}_2'' обозначим множества слабых вершин второго типа, каждое из которых содержит ровно одну вершину из каждой соединенной ребром пары вершин.

Положим

$$V_1 = V_1' \cup V_1'' \cup \tilde{V}_1'', \quad V_2 = V_2' \cup V_2'' \cup \tilde{V}_2''.$$

Тогда для каждой вершины $v \in V_1$ число $\alpha_\Gamma(v)$ делит d_1 , и для каждой вершины $v \in V_2$ число $\alpha_\Gamma(v)$ делит d_2 . Графы Γ_1 и Γ_2 являются WP-графами, так как они являются полными подграфами WP-графа. Ни один из них не содержит подграфа $\Delta(6, 10, 15)$; действительно, если один из них содержит такой подграф, то $\Delta(6, 10, 15)$ также является подграфом графа Γ , и все три вершины подграфа $\Delta(6, 10, 15)$ согласно нашей конструкции не могут одновременно лежать в любом из подграфов Γ_i . Мы также видим, что число $\text{Ism } \Gamma_i$ делит d_i . Более того, если $v \in V_1$ (соответственно $v \in V_2$) является слабой вершиной графа Γ , то $\tau(v) \in V_2$ (соответственно $\tau(v) \in V_1$). Это значит, что графы Γ_1 и Γ_2 сами по себе не имеют слабых вершин, так как любая слабая вершина графа Γ_i также является слабой вершиной графа Γ . □

Пример 9.32. Пусть Γ является WP-графом, изображенном на рисунке 7. Вершина этого графа с весом 7 является слабой вершиной первого типа, тогда как две вершины веса 17 являются слабыми вершинами второго типа. Все остальные вершины являются сильными. WP-граф Γ можно рассматривать

как WCI-граф коразмерности 2 и бистепени (d, d) , где

$$d = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 = 3570.$$

Следуя доказательству леммы 9.31, можно построить множество V_1' , состоящее из вершин с весами 70, 15 и 6, множество V_2'' , состоящее из вершины веса 7, и множества \tilde{V}_1'' и \tilde{V}_2'' , каждое из которых состоит из вершины веса 17, и положить $V_2' = V_1'' = \emptyset$.

Следствие 9.33. *Рассмотрим WCI-граф Γ коразмерности 2 и бистепени (d_1, d_2) . Множество вершин $V(\Gamma)$ является несвязным объединением $V(\Gamma) = V_1 \sqcup V_2$, таким что*

$$\sum_{v \in V_i} \alpha_\Gamma(v) \leq d_i.$$

Доказательство. Выберем множества V_1 и V_2 из леммы 9.31 и определим подграфы Γ_1 и Γ_2 графа Γ как подграфы, множествами вершин которых являются V_1 и V_2 . Мы знаем, что d_i делится на $\text{lcm } \Gamma_i$. По следствию 9.27 имеем

$$d_i \geq \text{lcm } \Gamma_i \geq \Sigma \Gamma_i = \sum_{v \in V_i} \alpha_\Gamma(v).$$

□

Пример 9.34. Пусть Γ — WP-граф, изображенный на рисунке 7, который мы будем рассматривать как WCI-граф коразмерности 2 и бистепени $(3570, 3570)$, см. пример 9.32. Тогда в качестве Γ_1 можно взять граф с двумя связными компонентами, одной из которых является треугольник с вершинами, имеющими веса 70, 15 и 6 вместе с соединяющими эти вершины ребрами, а другой является единственная вершина с весом 17, тогда как в качестве Γ_2 можно взять граф с двумя связными компонентами, каждая из которых является одной вершиной, одна с весом 7, а другая с весом 17.

Докажем теперь основную теорему параграфа.

Доказательство теоремы 9.15. Рассмотрим взвешенное полное пересечение X гиперповерхностей степеней d_1 и d_2 в $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$. Так как X гладко и хорошо сформировано, по [PSh16a, Lemma 2.15] для каждого числа k и каждого выбора k весов

$$w_{i_1}, \dots, w_{i_k}, 0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

наибольший общий делитель δ которых больше 1, существует k степеней

$$d_{s_1}, \dots, d_{s_k}, 1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq 2,$$

наибольший общий делитель которых делится на δ . В частности, любые три веса $w_{i_1}, w_{i_2}, w_{i_3}$ взаимно просты.

Можно считать, что

$$1 = w_0 = \dots = w_p < w_{p+1} \leq \dots \leq w_n.$$

Определим WP-граф Γ следующим образом. Вершины графа Γ мы будем обозначать через v_{p+1}, \dots, v_n , и две вершины v_i и v_j соединим ребром, если и только если веса w_i и w_j не взаимно просты. Более того, положим $\alpha_\Gamma(v_i) = w_i$. Легко удостовериться, что Γ является WP-графом. Более того, Γ является WCI-графом коразмерности 2 и бистепени (d_1, d_2) . По следствию 9.33 существует два несвязных множества V_1 и V_2 , таких что

$$V_1 \sqcup V_2 = [p+1, n]$$

и $\sum_{j \in V_i} w_j \leq d_i$ для $i = 1, 2$. Так как X является многообразием Фано, имеем

$$(9.35) \quad \sum_{i=0}^n w_i > d_1 + d_2,$$

см. [Do82, Theorem 3.3.4] или [IF00, 6.14]. Это значит, что к множествам V_1 и V_2 можно добавить индексы единичных весов, то есть некоторые индексы из множества $[0, p]$ и образовать два несвязных подмножества $S_1 \supset V_1$ и $S_2 \supset V_2$

множества $\{0, \dots, n\}$, так что $\sum_{j \in S_i} w_j = d_i$ для $i = 1, 2$. Более того, так как неравенство (9.35) строгое, получаем, что множество

$$S_0 = [0, n] \setminus (S_1 \cup S_2)$$

непусто. Все веса w_i с индексами $i \in S_0$ равны 1, так что неф-разбиение

$$\{0, \dots, n\} = S_0 \sqcup S_1 \sqcup S_2$$

очень хорошее. □

Пример 9.36. Пусть X — полное пересечение двух гиперповерхностей степени 3570 в $\mathbb{P}(1^k, 6, 15, 70, 7, 17, 17)$, где 1^k означает вес 1, повторенный k раз. Оно является хорошо сформированным взвешенным пересечением Фано, если k достаточно велико (а X общее). Пример 9.34 дает хорошее неф-разбиение для X . Для этого случая, конечно, существует много других хороших неф-разбиений. Заметим, что если X достаточно общее, то оно гладкое.

Если X является гладким хорошо сформированным взвешенным пересечением Калаби–Яу дивизоров Картье или коразмерности 1 или 2, следуя доказательствам теоремы 9.10 и теоремы 9.15 можно показать, что для X существует неф-разбиение, при котором $I_0 = \emptyset$ в обозначениях определения 9.7. Построив двойственное неф-разбиение, мы получим многообразие Калаби–Яу Y , зеркально двойственное к X , см. [ВВ96]. В той же самой статье доказана зеркальная симметрия чисел Ходжа для X и Y . А именно, для многообразия V можно определить *струнные числа Ходжа* $h_{st}^{p,q}(V)$, которые равны числам Ходжа крепантного разрешения многообразия V , если, конечно, такое разрешение существует. Тогда для $n = \dim X = \dim Y$ выполнено $h_{st}^{p,q}(X) = h_{st}^{n-p,q}(Y)$, если объемлющее торическое многообразие (в нашем случае взвешенное проективное пространство) горенштейново.

Наконец, приведем возможный подход к доказательству гипотезы 9.1, продолжающий доказательство теоремы 9.15. Если X является гладким хорошо

сформированным взвешенным полным пересечением Фано коразмерности 3 или больше во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$, то возможно, что некоторые три веса w_{i_1} , w_{i_2} и w_{i_3} имеют общий делитель, больший 1. Таким образом, построенный в теореме 9.15 WP-граф не дает правильного описания взвешенного проективного пространства \mathbb{P} . Естественным способом избежать этого является замена графа на симплициальный комплекс, который будет помнить наибольшие общие делители произвольных подмножеств весов w_i в определении 9.16. Однако это приводит к комбинаторным трудностям, которые нами пока не преодолены. Кроме очевидных проблем, таких как эффекты для слабых вершин (которые может быть не так просто контролировать) и возможно большее число исключений — аналогов WP-графа $\Delta(6, 10, 15)$, есть и несколько менее очевидные (которые, правда, легко преодолеть). А именно, нам необходимо иметь больше информации о весах и степенях, которая дается [PSh16a, Lemma 2.15].

Пример 9.37. Рассмотрим полное пересечение X гиперповерхностей степеней 2, 3, 5 и 30 в $\mathbb{P}(1^k, 6, 10, 15)$, где, как и раньше, 1^k означает вес 1, повторенный k раз. Тогда X является хорошо сформированным полным пересечением Фано, если k достаточно велико, а X общее. Заметим, что утверждение [PSh16a, Lemma 2.15] выполнено для X . Однако легко видеть, что X гладко. Более того, X не имеет неф-разбиения.

В любом случае легко видеть, что информация, которую мы можем получить из того факта, что взвешенное полное пересечение гладко, заметно сильнее, чем информация, которую дает [PSh16a, Lemma 2.15]. Мы также ожидаем, что комбинаторные сложности, с которыми придется столкнуться при доказательстве гипотезы 9.1 предложенным выше способом, возможно преодолеть.

9.3. ЧЕТЫРЕХ- И ПЯТИМЕРНЫЕ ГЛАДКИЕ ВЗВЕШЕННЫЕ ПОЛНЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ФАНО

Гладкие хорошо сформированные взвешенные полные пересечения Фано размерностей 2 и 3 известны и хорошо изучены (см., к примеру, [IP99]), а их исторические модели Ландау–Гинзбурга изучены в настоящей работе. В этом параграфе мы выпишем все неф-разбиения и соответствующие им слабые модели Ландау–Гинзбурга для четырех- и пятимерного случая. Некоторые из них имеют коразмерность больше 2, что дает еще одно свидетельство в пользу гипотезы 9.1.

В таблице 4 и таблице 5 мы перечисляем неф-разбиения и соответствующие им слабые модели Ландау–Гинзбурга для четырех- и пятимерных гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано, которые не являются пересечениями с линейными конусами (определения см. в [PSh16a, §2]). Эти взвешенные полные пересечения классифицированы в [PSh16a, §5], см. также [Kü97, Proposition 2.2.1], в котором первым был изучен случай размерности 4. В первом столбце таблиц 4 и 5 находится номер семейства в соответствии с [PSh16a, §5]. Второй столбец описывает взвешенное проективное пространство, в котором лежит полное пересечение. Мы, как и раньше, используем обозначение

$$(w_0^{k_0}, \dots, w_m^{k_m}) = (\underbrace{w_0, \dots, w_0}_{k_0 \text{ раз}}, \dots, \underbrace{w_m, \dots, w_m}_{k_m \text{ раз}}),$$

где k_0, \dots, k_m — произвольные положительные целые числа. Если некоторые из чисел k_i равны 1, мы их для простоты опускаем. В третьем столбце мы приводим степени задающих полное пересечение гиперповерхностей. Четвертый столбец описывает хорошие неф-разбиения; в общем случае их много, но мы не различаем неф-разбиения, которые отличаются на перестановку индексов, соответствующих одинаковым весам. В пятом столбце мы выписываем соответствующие слабые модели Ландау–Гинзбурга, полученные с

помощью формулы (5.24). Мы исключаем из таблиц четырех- и пятимерные проективные пространства, чтобы унифицировать наши таблицы с таблицами из [PSh16a, §5].

N	\mathbb{P}	Степени	Неф-разбиения	Слабые модели Ландау–Гинзбурга
1	$\mathbb{P}(1^3, 2^2, 3^2)$	6,6	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 4\} \sqcup \{5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^6(y_1+1)^6}{x_1x_2x_3^2y_1^3}$
			$\{0\} \sqcup \{1, 3, 5\} \sqcup \{2, 4, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^6(y_1+y_2+1)^6}{x_1x_2^2y_1y_2^2}$
2	$\mathbb{P}(1^4, 2, 5)$	10	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+1)^{10}}{x_1x_2x_3x_4^2}$
3	$\mathbb{P}(1^4, 2^2, 3)$	4,6	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 4\} \sqcup \{3, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^4(y_1+y_2+1)^6}{x_1x_2y_1y_2^2}$
			$\{0\} \sqcup \{4, 5\} \sqcup \{1, 2, 3, 6\}$	$\frac{(x_1+1)^4(y_1+y_2+y_3+1)^6}{x_1^2y_1y_2y_3}$
4	$\mathbb{P}(1^5, 4)$	8	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+1)^8}{x_1x_2x_3x_4}$
5	$\mathbb{P}(1^5, 2)$	6	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+1)^6}{x_1x_2x_3x_4}$
6	$\mathbb{P}(1^5, 2^2)$	4,4	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 4\} \sqcup \{5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^4(y_1+1)^4}{x_1x_2x_3y_1^2}$
			$\{0\} \sqcup \{1, 2, 5\} \sqcup \{3, 4, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^4(y_1+y_2+1)^4}{x_1x_2y_1y_2}$
7	$\mathbb{P}(1^6, 3)$	2,6	$\{0\} \sqcup \{1, 2\} \sqcup \{3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+y_2+y_3+1)^6}{x_1y_1y_2y_3}$
8	\mathbb{P}^5	5	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+1)^4}{x_1x_2x_3x_4}$
9	$\mathbb{P}(1^6, 2)$	3,4	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3\} \sqcup \{4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^3(y_1+y_2+1)^4}{x_1x_2y_1y_1}$
			$\{0\} \sqcup \{1, 6\} \sqcup \{2, 3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+1)^3(y_1+y_2+y_3+1)^4}{x_1y_1y_2y_3}$
10	\mathbb{P}^6	2,4	$\{0\} \sqcup \{1, 2\} \sqcup \{3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+y_2+y_3+1)^4}{x_1y_1y_2y_3}$
11	\mathbb{P}^6	3,3	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3\} \sqcup \{4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^3(y_1+y_2+1)^3}{x_1x_2y_1y_2}$
12	\mathbb{P}^7	2,2,3	$\{0\} \sqcup \{1, 2\} \sqcup \{3, 4\} \sqcup \{5, 6, 7\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2(z_1+z_2+1)^3}{x_1y_1z_1z_2}$
13	\mathbb{P}^8	2,2,2,2	$\{0\} \sqcup \{1, 2\} \sqcup \{3, 4\} \sqcup \{5, 6\} \sqcup \{7, 8\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2(z_1+1)^2(u_1+1)^2}{x_1y_1z_1u_1}$

N	\mathbb{P}	Степени	Неф-разбиения	Слабые модели Ландау–Гинзбурга
14	$\mathbb{P}(1^5, 3)$	6	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^6}{x_1 x_2 x_3 t_1} + t_1$
15	\mathbb{P}^5	4	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^4}{x_1 x_2 x_3 t_1} + t_1$
16	\mathbb{P}^6	2,3	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3\} \sqcup \{4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+y_2+1)^3}{x_1 y_1 y_2 t_1} + t_1$
17	\mathbb{P}^7	2,2,2	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3\} \sqcup \{4, 5\} \sqcup \{6, 7\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2(y_2+1)^2}{x_1 y_1 z_1 t_1} + t_1$
18	$\mathbb{P}(1^4, 2, 3)$	6	$\{0, 1, 2\} \sqcup \{3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^6}{x_1 x_2^2 t_1 t_2} + t_1 + t_2$
			$\{0, 4\} \sqcup \{1, 2, 3, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^6}{x_1 x_2 x_3 t_1^2} + t_1$
19	$\mathbb{P}(1^5, 2)$	4	$\{0, 1, 2\} \sqcup \{3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^4}{x_1 x_2 t_1 t_2} + t_1 + t_2$
			$\{0, 5\} \sqcup \{1, 2, 3, 4\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^4}{x_1 x_2 x_3 t_1^2} + t_1$
20	\mathbb{P}^5	3	$\{0, 1, 2\} \sqcup \{3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^3}{x_1 x_2 t_1 t_2} + t_1 + t_2$
21	\mathbb{P}^6	2,2	$\{0, 1, 2\} \sqcup \{3, 4\} \sqcup \{5, 6\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2}{x_1 y_1 t_1 t_2} + t_1 + t_2$
22	\mathbb{P}^5	2	$\{0, 1, 2, 3\} \sqcup \{4, 5\}$	$\frac{(x_1+1)^2}{x_1 t_1 t_2 t_3} + t_1 + t_2 + t_3$

Таблица 4: Четырехмерные гладкие взвешенные полные пересечения Фано

N	\mathbb{P}	Степени	Неф-разбиения	Слабые модели Ландау–Гинзбурга
1	$\mathbb{P}(1^5, 2, 3, 3)$	6, 6	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 4, 5\} \sqcup \{6, 7\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+1)^6(y_1+1)^6}{x_1 x_2 x_3 x_4 y_1^3}$
			$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 6\} \sqcup \{4, 5, 7\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^6(y_1+y_2+1)^6}{x_1 x_2 x_3 y_1 y_2^2}$
2	$\mathbb{P}(1^6, 5)$	10	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+1)^{10}}{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}$
3	$\mathbb{P}(1^6, 2, 3)$	4, 6	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 4\} \sqcup \{5, 6, 7\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^4(y_1+y_2+1)^6}{x_1 x_2 x_3 y_1 y_2^2}$
			$\{0\} \sqcup \{1, 7\} \sqcup \{2, 3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+1)^4(y_1+y_2+y_3+y_4+1)^6}{x_1 y_1 y_2 y_3 y_4}$
			$\{0\} \sqcup \{1, 2, 6\} \sqcup \{3, 4, 5, 7\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^4(y_1+y_2+y_3+1)^6}{x_1 x_2 y_1 y_2 y_3}$

N	\mathbb{P}	Степени	Неф-разбиения	Слабые модели Ландау–Гинзбурга
4	$\mathbb{P}(1^7, 4)$	2, 8	$\{0\} \sqcup \{1, 2\} \sqcup \{3, 4, 5, 6, 7\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+y_2+y_3+y_4+1)^8}{x_1 y_1 y_2 y_3 y_4}$
5	\mathbb{P}^6	6	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+1)^6}{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}$
6	$\mathbb{P}(1^7, 2)$	4, 4	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3, 4\} \sqcup \{5, 6, 7\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^4(y_1+y_2+1)^4}{x_1 x_2 x_3 y_1 y_2}$
7	$\mathbb{P}(1^8, 3)$	2,2,6	$\{0\} \sqcup \{1, 2\} \sqcup \{3, 4\} \sqcup \{5, 6, 7, 8\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2(z_1+z_2+z_3+1)^6}{x_1 y_1 z_1 z_2 z_3}$
8	\mathbb{P}^7	2, 5	$\{0\} \sqcup \{1, 2\} \sqcup \{3, 4, 5, 6, 7\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+y_2+y_3+y_4+1)^5}{x_1 y_1 y_2 y_3 y_4}$
9	\mathbb{P}^7	3, 4	$\{0\} \sqcup \{1, 2, 3\} \sqcup \{4, 5, 6, 7\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^3(y_1+y_2+y_3+1)^4}{x_1 x_2 y_1 y_2 y_3}$
10	\mathbb{P}^8	2,2,4	$\{0\} \sqcup \{1, 2\} \sqcup \{3, 4\} \sqcup \{5, 6, 7, 8\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2(z_1+z_2+z_3+1)^4}{x_1 y_1 z_1 z_2 z_3}$
11	\mathbb{P}^8	2,3,3	$\{0\} \sqcup \{1, 2\} \sqcup \{3, 4, 5\} \sqcup \{6, 7, 8\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+y_2+1)^3(z_1+z_2+1)^3}{x_1 y_1 y_2 z_1 z_2}$
12	\mathbb{P}^9	2,2,2,3	$\{0\} \sqcup \{1, 2\} \sqcup \{3, 4\} \sqcup \{5, 6\} \sqcup \{7, 8, 9\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2(z_1+1)^2(u_1+u_2+1)^3}{x_1 y_1 z_1 u_1 u_2}$
13	\mathbb{P}^{10}	2,2,2,2,2	$\{0\} \sqcup \{1, 2\} \sqcup \{3, 4\} \sqcup \{5, 6\} \sqcup \{7, 8\} \sqcup \{9, 10\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2(z_1+1)^2(u_1+1)^2(v_1+1)^2}{x_1 y_1 z_1 u_1 v_1}$
14	$\mathbb{P}(1^4, 2, 2, 3, 3)$	6, 6	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 4, 5\} \sqcup \{6, 7\}$ $\{0, 1\} \sqcup \{2, 4, 6\} \sqcup \{3, 5, 7\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^6(y_1+1)^6}{x_1 x_2 x_3^2 y_1^3 t_1} + t_1$ $\frac{(x_1+x_2+1)^6(y_1+y_2+1)^6}{x_1 x_2^2 y_1^2 y_2^2 t_1} + t_1$
15	$\mathbb{P}(1^5, 2, 5)$	10	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+1)^{10}}{x_1 x_2 x_3 x_4^2 t_1} + t_1$
16	$\mathbb{P}(1^5, 2, 2, 3)$	4, 6	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 5\} \sqcup \{4, 6, 7\}$ $\{0, 1\} \sqcup \{2, 7\} \sqcup \{3, 4, 5, 6\}$ $\{0, 1\} \sqcup \{5, 6\} \sqcup \{2, 3, 4, 7\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^4(y_1+y_2+1)^6}{x_1 x_2 y_1 y_2^3 t_1} + t_1$ $\frac{(x_1+1)^4(y_1+y_2+y_3+1)^6}{x_1 y_1 y_2 y_3^3 t_1} + t_1$ $\frac{(x_1+1)^4(y_1+y_2+y_3+1)^6}{x_1^2 y_1 y_2 y_3 t_1} + t_1$
17	$\mathbb{P}(1^6, 4)$	8	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+1)^8}{x_1 x_2 x_3 x_4 t_1} + t_1$
18	$\mathbb{P}(1^6, 2)$	6	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+1)^6}{x_1 x_2 x_3 x_4 t_1} + t_1$
19	$\mathbb{P}(1^6, 2, 2)$	4, 4	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 4, 5\} \sqcup \{6, 7\}$ $\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 6\} \sqcup \{4, 5, 7\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^4(y_1+1)^4}{x_1 x_2 x_3 y_1^2 t_1} + t_1$ $\frac{(x_1+x_2+1)^4(y_1+y_2+1)^4}{x_1 x_2 y_1 y_2 t_1} + t_1$
20	$\mathbb{P}(1^7, 3)$	2, 6	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3\} \sqcup \{4, 5, 6, 7\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+y_2+y_3+1)^6}{x_1 y_1 y_2 y_3 t_1} + t_1$
21	\mathbb{P}^6	5	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+1)^5}{x_1 x_2 x_3 x_4 t_1} + t_1$
22	$\mathbb{P}(1^7, 2)$	3, 4	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 4\} \sqcup \{5, 6, 7\}$ $\{0, 1\} \sqcup \{2, 7\} \sqcup \{3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^3(y_1+y_2+1)^4}{x_1 x_2 y_1 y_2 t_1} + t_1$ $\frac{(x_1+1)^3(y_1+y_2+y_3+1)^4}{x_1 y_1 y_2 y_3 t_1} + t_1$
23	\mathbb{P}^7	2, 4	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3\} \sqcup \{4, 5, 6, 7\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+y_2+y_3+1)^4}{x_1 y_1 y_2 y_3 t_1} + t_1$

N	\mathbb{P}	Степени	Неф-разбиения	Слабые модели Ландау–Гинзбурга
24	\mathbb{P}^7	3,3	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3, 4\} \sqcup \{5, 6, 7\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^3(y_1+y_2+1)^3}{x_1x_2y_1y_2t_1} + t_1$
25	\mathbb{P}^8	2,2,3	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3\} \sqcup \{4, 5\} \sqcup \{6, 7, 8\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2(z_1+z_2+1)^3}{x_1y_1z_1z_2t_1} + t_1$
26	\mathbb{P}^9	2,2,2,2	$\{0, 1\} \sqcup \{2, 3\} \sqcup \{4, 5\} \sqcup \{6, 7\} \sqcup \{8, 9\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2(z_1+1)^2(u_1+1)^2}{x_1y_1z_1u_1t_1} + t_1$
27	$\mathbb{P}(1^6, 3)$	6	$\{0, 1, 2\} \sqcup \{3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^6}{x_1x_2x_3t_1t_2} + t_1 + t_2$
28	\mathbb{P}^6	4	$\{0, 1, 2\} \sqcup \{3, 4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^4}{x_1x_2x_3t_1t_2} + t_1 + t_2$
29	\mathbb{P}^7	2,3	$\{0, 1, 2\} \sqcup \{3, 4\} \sqcup \{5, 6, 7\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+y_2+1)^3}{x_1y_1y_2t_1t_2} + t_1 + t_2$
30	\mathbb{P}^8	2,2,2	$\{0, 1, 2\} \sqcup \{3, 4\} \sqcup \{5, 6\} \sqcup \{7, 8\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2(z_1+1)^2}{x_1y_1z_1t_1t_2} + t_1 + t_2$
31	$\mathbb{P}(1^5, 2, 3)$	6	$\{0, 1, 2, 3\} \sqcup \{4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^6}{x_1x_2^2t_1t_2t_3} + t_1 + t_2 + t_3$
			$\{0, 1, 5\} \sqcup \{2, 3, 4, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^6}{x_1x_2x_3t_1t_2^2} + t_1 + t_2$
			$\{0, 6\} \sqcup \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+1)^6}{x_1x_2x_3x_4t_1^3} + t_1$
32	$\mathbb{P}(1^6, 2)$	4	$\{0, 1, 2, 3\} \sqcup \{4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^4}{x_1x_2t_1t_2t_3} + t_1 + t_2 + t_3$
			$\{0, 1, 6\} \sqcup \{2, 3, 4, 5\}$	$\frac{(x_1+x_2+x_3+1)^4}{x_1x_2x_3t_1t_2^2} + t_1 + t_2$
33	\mathbb{P}^6	3	$\{0, 1, 2, 3\} \sqcup \{4, 5, 6\}$	$\frac{(x_1+x_2+1)^3}{x_1x_2t_1t_2t_3} + t_1 + t_2 + t_3$
34	\mathbb{P}^7	2,2	$\{0, 1, 2, 3\} \sqcup \{4, 5\} \sqcup \{6, 7\}$	$\frac{(x_1+1)^2(y_1+1)^2}{x_1y_1t_1t_2t_3} + t_1 + t_2 + t_3$
35	\mathbb{P}^6	2	$\{0, 1, 2, 3, 4\} \sqcup \{5, 6\}$	$\frac{(x_1+1)^2}{x_1t_1t_2t_3t_4} + t_1 + t_2 + t_3 + t_4$

Таблица 5: Пятимерные гладкие взвешенные полные пересечения Фано

Замечание 9.38. Множества I_0 , в обозначениях определения 9.7, построенные в теореме 9.15, состоит из индексов, веса для которых равны 1. Однако некоторые гладкие хорошо сформированные полные пересечения могут допускать и другие неф-разбиения, имеющие нетривиальные веса для множества I_0 , см., например, многообразия с номерами 18 и 19 в таблице 4 и с номерами 31 и 32 в таблице 5.

Вопрос 9.39. Видно, что многообразия с номерами 1, 3, 6, 9, 18, 19 из таблицы 4 и с номерами 1, 14, 19, 22, 32 из таблицы 5 имеют по два различных

неф-разбиения, тогда как многообразия с номерами 3, 16 и 31 из таблицы 5 имеют три различных неф-разбиения. Таким образом им соответствуют два или три неф-разбиения. В [Li16] (см. также [Pri]) показано, что при некоторых не очень сильных условиях модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталя для полных пересечений в горенштейновых торических многообразиях, соответствующие различным неф-разбиениям, бирационально изоморфны. Верно ли это для полных пересечений во взвешенных проективных пространствах?

Замечание 9.40. Для слабых моделей Ландау–Гинзбурга, перечисленных в таблицах 4 и 5, по теореме 5.25 выполнено торическое условие. Большинство из них является полным пересечением в обычных проективных пространствах, так что по теореме 5.19 для них выполнено и условие Калаби–Яу, что значит, что они являются торическими моделями Ландау–Гинзбурга. Более того, условие Калаби–Яу может быть проверено и для некоторых других многообразий: для многообразия с номером 18 из таблицы 5, используя метод из теоремы 7.24, а для многообразий с номером 18, 19 (для второго неф-разбиения), 22 (для первого неф-разбиения), 27, 32 (для обоих неф-разбиений) из таблицы 5 следуя доказательству теоремы 5.19, так как соответствующие многогранники Ньютона рефлексивны. Это показывает, что соответствующие многочлены Лорана являются торическими моделями Ландау–Гинзбурга.

Вопрос 9.41. *Верны ли аналоги теоремы 3.33 и теоремы 7.24 для взвешенных полных пересечений Фано, обладающих хорошими неф-разбиениями?*

СПИСОК РАБОТ, В КОТОРЫХ ОПУБЛИКОВАНЫ ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ
ДИССЕРТАЦИИ

- (1) V. Przyjalkowski, *On Landau–Ginzburg models for Fano varieties*, Comm. Num. Th. Phys., Vol. 1, No. 4, 713–728, 2008.
- (2) L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, *Generalized Homological Mirror Symmetry and cubics*, Многомерная алгебраическая геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти члена-корреспондента РАН Василия Алексеевича Исковских, Тр. МИАН, 264, МАИК, М., 2009, 94–102.
- (3) V. Przyjalkowski, *Hori–Vafa mirror models for complete intersections in weighted projective spaces and weak Landau–Ginzburg models*, Cent. Eur. J. Math. 9, No. 5, 972–977 (2011).
- (4) L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, *Landau–Ginzburg models — old and new*, Akbulut, Selman (ed.) et al., Proceedings of the 18th Gokova geometry–topology conference. Somerville, MA: International Press; Gokova: Gokova Geometry-Topology Conferences, 97–124 (2012).
- (5) I. Cheltsov, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, *Birational geometry via moduli spaces*, Birational geometry, rational curves, and arithmetic, Simons symposium 2012, Springer, 2013, 93–132.
- (6) N. Ilten, J. Lewis, V. Przyjalkowski. *Toric Degenerations of Fano Threefolds Giving Weak Landau–Ginzburg Models*, Journal of Algebra 374 (2013), 104–121.
- (7) В. В. Пржиялковский, *Слабые модели Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано*, Известия РАН. Серия математическая, 77: 4 (2013), 135–160.

- (8) A. Iliev, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, *Double solids, categories and non-rationality*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 57 (2014), 145–173.
- (9) В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, *О слабых моделях Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах*, УМН т. 69, 6(420) (2014), 181–182.
- (10) V. Przyjalkowski, C. Shramov, *On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models*, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2015:21 (2015), 11302–11332.
- (11) В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, *Феномен Лорана для моделей Ландау–Гинзбурга полных пересечений в грассманианах*, Современные проблемы математики, механики и математической физики, Сборник статей, Тр. МИАН, 290, М., МАИК (2015), 102–113.
- (12) В. В. Пржиялковский, *Компактификации Калаби–Яу торических моделей Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано*, Матем. Сборник, 208:7 (2017), DOI:10.4213/SM8838.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ab09] M. Abouzaid, *Morse homology, tropical geometry, and homological mirror symmetry for toric varieties*, *Selecta Math.* 15 no. 2 (2009), 189–270.
- [ATY85] L. Aizenberg, A. Tsikh, A. Yuzhakov, *Higher-dimensional residues and their applications Current problems in mathematics*, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Vol. 8, 5–64, 1985.
- [ACGK12] M. Akhtar, T. Coates, S. Galkin, A. Kasprzyk, *Minkowski polynomials and mutations*, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 8:Paper 094, 17, 2012.
- [Al95] K. Altmann, *Minkowski sums and homogeneous deformations of toric varieties*, *Tohoku Math. J.* (2), 47:2 (1995), 151–184.
- [ABB13] A. Auel, C. Bohning, H.-C. Graf von Bothmer, *The transcendental lattice of the sextic Fermat surface*, *Math. Res. Lett.* 20, no. 6 (2013), 1017–1031.
- [AKO06] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for Del Pezzo surfaces: Vanishing cycles and coherent sheaves*, *Inv. Math.* 166, No. 3 (2006), 537–582.
- [Ba93] V. V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties*, *J. Algebraic Geom.* 3 (1994), no. 3, 493–535.
- [Ba97] V. V. Batyrev, *Toric Degenerations of Fano Varieties and Constructing Mirror Manifolds*, Collino, Alberto (ed.) et al., *The Fano conference. Papers of the conference, organized to commemorate the 50th anniversary of the death of Gino Fano (1871–1952)*, Torino, Italy, September 29–October 5, 2002. Torino: Università di Torino, Dipartimento di Matematica. 109–122 (2004).
- [Ba99] V. Batyrev, *Birational Calabi–Yau n -folds have equal Betti numbers*, *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, 1–11, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [BB96] V. Batyrev, L. Borisov, *Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers*, *Invent. Math.* 126 (1996), no. 1, 183–203.
- [BM96] K. Behrend, Yu. Manin, *Stacks of Stable Maps and Gromov-Witten Invariants*, *Duke Math. J.* 85 (1996), no. 1, 1–60.
- [Be02] S.-M. Belcastro *Picard Lattices of Families of $K3$ Surfaces*, *Communications in Algebra* 30:1 (2002), 61–82.
- [BCFKS97] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi–Yau complete intersections in Grassmannians*, *Nucl. Phys., B* 514, No.3, 640–666 (1998).
- [BCFKS98] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Mirror Symmetry and Toric Degenerations of Partial Flag Manifolds*, *Acta Math.* 184, No. 1 (2000), 1–39.
- [BCFK03] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, *Two Proofs of a Conjecture of Hori and Vafa*, *Duke Math. J.* 126, No. 1, 101–136 (2005).

- [Br07] G. Brown, *A database of polarized K3 surfaces*, Experimental Mathematics, **16** (2007), 7–20.
- [COGP91] P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green, L. Parkes, *A pair of Calabi–Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl.Phys. B 359 (1991), 21–74.
- [Ch03] И. А. Чельцов, *Антиканонические модели трехмерных многообразий Фано степени четыре*, Матем. сб., 194:4 (2003), 147–172.
- [CPS05] В. В. Пржиялковский, И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, *Гиперэллиптические и тригональные трехмерные многообразия Фано*, Изв. РАН. Сер. матем., 69:2 (2005), 145–204.
- [CI14] J. Christophersen, N. Ilten, *Degenerations to unobstructed Fano Stanley-Reisner schemes*, Math. Z. 278 (2014), no. 1-2, 131–148.
- [CD07] A. Clingher, C. Doran, *Modular invariants for lattice polarized K3 surfaces*, Michigan Math. J, 55 (2007), 355–393.
- [CCG⁺] T. Coates, A. Corti, S. Galkin, V. Golyshev, A. Kasprzyk. *Fano varieties and extremal Laurent polynomials. A collaborative research blog*, <http://coates.ma.ic.ac.uk/fanosearch/>.
- [CCGGK12] T. Coates, A. Corti, S. Galkin, V. Golyshev, A. Kasprzyk, *Mirror Symmetry and Fano Manifolds*, European Congress of Mathematics (Krakow, 2–7 July, 2012), November 2013, pp. 285–300.
- [CCGK16] T. Coates, A. Corti, S. Galkin, A. Kasprzyk. *Quantum Periods for 3-Dimensional Fano Manifolds*, Geom. Topol. 20 (2016) 103–256.
- [CoKaPr14] T. Coates, A. Kasprzyk, T. Prince, *Four-dimensional Fano toric complete intersections*, Proc. R. Soc. A, DOI: 10.1098/rspa.2014.0704.
- [CG11] A. Corti, V. Golyshev, *Hypergeometric Equations and Weighted Projective Spaces*, Sci. China, Math. 54, No. 8, 1577–1590 (2011).
- [CLS11] D. Cox, J. Little, H. Schenck, *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics 124. Providence, RI: AMS (2011).
- [Cr04] A. Craw, *An introduction to motivic integration*, Strings and Geometry, 203–225, Clay Mathematical Proceedings 3, AMS, Providence, RI, 2004.
- [Da78] В. Данилов, *Геометрия торических многообразий*, Успехи матем. наук, т. 33, вып. 2 (200) (1978), 85–134.
- [DH86] В. И. Данилов, А. Г. Хованский, *Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа-Делиня* Изв. АН СССР. Сер. матем., 50:5 (1986), 925–945.
- [dP87] P. del Pezzo, *Sulle superficie dell’ n^{mo} ordine immerse nello spazio di dimensioni*, Rend. del circolo matematico di Palermo 1 (1): 241–271, 1887.
- [DI87] P. Deligne, L. Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Invent. Math. 89 (1987), no. 2, 247–270.
- [Di86] A. Dimca, *Singularities and coverings of weighted complete intersections*, J. Reine Angew. Math. **366** (1986), 184–193.

- [Di95] A. Dimca. *Residues and cohomology of complete intersections*, Duke Math. J. 78 no. 1 (1995), 89–100.
- [Do82] I. Dolgachev, *Weighted projective varieties*, in “Lecture Notes in Math.”, 956, Springer-Verlag, Berlin, (1982), 34–71.
- [Do01] И. В. Долгачев, *Зеркальная симметрия для поляризованных КЗ-поверхностей*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 33 (2001), 20–71.
- [Do12] I. Dolgachev, *Classical algebraic geometry. A modern view*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [DH15] C. Doran, A. Harder, *Toric Degenerations and the Laurent polynomials related to Givental’s Landau–Ginzburg models*, Canad. J. Math. 68 (2016), no. 4, 784–815.
- [DHKLP] C. Doran, A. Harder, L. Katzarkov, J. Lewis, V. Przyjalkowski, *Modularity of Fano threefolds*, препринт.
- [EHX97] T. Eguchi, K. Hori, C.-Sh. Xiong, *Gravitational quantum cohomology*, Int. J. Mod. Phys. A 12, No. 9, 1743–1782 (1997).
- [Fu93] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [Gal08] С. С. Галкин, *Малые торические вырождения трехмерных многообразий Фано*, http://www.mi.ras.ru/~galkin/papers/term_def.pdf, препринт (2008).
- [Gat02] A. Gathmann, *Absolute and relative Gromov–Witten invariants of very ample hypersurfaces*, Duke Math. J. 115 (2002), no. 2, 171–203.
- [Gi97a] A. Givental, *Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture*, Topics in singularity theory, 103–115, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 180, AMS, Providence, RI, 1997.
- [Gi97b] A. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), 141–175, Progr. Math., 160, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1998.
- [Go07] V. Golyshev, *Classification problems and mirror duality*, Young, Nicholas (ed.), Surveys in geometry and number theory. Reports on contemporary Russian mathematics. Cambridge: Cambridge University Press. LMS Lecture Note Ser. 338, 88–121 (2007).
- [Gr69] P. Griffiths. *On the periods of certain rational integrals I,II*, Ann. of Math. 90 (1969), 460–541.
- [GKR12] M. Gross, L. Katzarkov, H. Ruddat, *Towards mirror symmetry for varieties of general type*, Advances in Mathematics 308 (2017) 208–275.
- [Ha16] A. Harder, *The Geometry of Landau–Ginzburg models*, thesis, <https://era.library.ualberta.ca/files/c0z708w408#.WB93zdKLRdg>.
- [Hi66] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry. Third enlarged edition*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 131 Springer-Verlag New York, Inc., New York 1966.

- [HV00] K. Hori, C. Vafa, *Mirror symmetry*, arXiv:hep-th/0002222.
- [IF00] A. R. Iano-Fletcher, *Working with weighted complete intersections*, Explicit birational geometry of 3-folds, 101–173, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 281, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [IKKPS] N. Ilten, A. Kasprzyk, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, D. Sakovics, *Projecting Fanos in the mirror*, препринт.
- [IV09] ILTEN N. and VOLLMERT R., *Deformations of Rational T-Varieties*, J. Algebraic Geom. 21 (2012), no. 3, 531–562.
- [Is77] В. А. Исковских, *Трёхмерные многообразия Фано. I, II*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 41:3 (1977), 516–562; 42:3 (1978), 506–549.
- [IM71] В. А. Исковских, Ю.И. Манин, *Трёхмерные кватрики и контрпримеры к проблеме Люрота*, Матем. сб., 86(128):1(9) (1971), 140–166.
- [IP99] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, *Fano varieties*, Encyclopaedia Math. Sci. 47 (1999) Springer, Berlin.
- [ISh89] В. А. Исковских, И. Р. Шафаревич, *Алгебраические поверхности*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 35 (1989), 131–263.
- [JR06] P. Jahnke, I. Radloff, *Gorenstein Fano threefolds with base points in the anticanonical system*, Compos. Math. 142 (2006), no. 2, 422–432.
- [JR06] P. Jahnke, I. Radloff, *Terminal Fano threefolds and their smoothings*. Mathematische Zeitschrift **269** (2011), 1129–1136.
- [IV12] N. Ilten, R. Vollmert. *Deformations of Rational T-Varieties*. J. Algebraic Geom. 21 (2012), no. 3, 531–562.
- [KT] A. Kasprzyk, K. Tveiten, *Maximally mutable Laurent polynomials*, препринт.
- [Ka70] N. Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem: applications of a result of Turrittin*, IHÉS Publ. Math., (39):175–232, 1970.
- [KKP17] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models*, J. Diff. Geom., 105, No. 1 (2017), 55–117.
- [Ko63] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces. II, III*, Ann. of Math. (2) 77 (1963), 563–626; *ibid.* 78 1963 1–40.
- [Kon94] M. L. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proc. International Congress of Mathematicians (Zürich 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 120–139.
- [KM94] M. Kontsevich, Yu. Manin, *Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys. 164 (1994) 525–562.
- [KS02] M. Kreuzer, H. Skarke, *Reflexive polyhedra, weights and toric Calabi–Yau fibrations*, Rev. Math. Phys., 14 (2002), 343–374.

- [Kü97] O. Küchle, *Some remarks and problems concerning the geography of Fano 4-folds of index and Picard number one*, Quaestiones Math. 20 (1997), no. 1, 45–60.
- [Kul08] Вик. С. Куликов, *Замечание к проблеме нерациональности общей четырехмерной кубики*, Матем. заметки, 83:1 (2008), 61–68.
- [Kuz06] A. Kuznetsov, *Homological projective duality for Grassmannians of lines*, arXiv:math/0610957.
- [Kuz10] A. Kuznetsov, *Derived categories of cubic fourfolds*, Bogomolov, Fedor (ed.) et al., Cohomological and geometric approaches to rationality problems. New Perspectives. Boston, MA: Birkhauser. Progress in Mathematics 282 (2010), 219–243.
- [LePa04] Y.-P. Lee, R. Pandharipande, *A reconstruction theorem in quantum cohomology and quantum K-theory*, Amer. J. Math 126 (2004), 1367–1379.
- [LuPr16] V. Lunts, V. Przyjalkowski, *Landau–Ginzburg Hodge numbers for mirrors of del Pezzo surfaces*, arXiv:1607.08880.
- [Li16] Zh. Li, *On the birationality of complete intersections associated to nef-partitions*, Adv. Math. 299 (2016), 71–107.
- [Ma02] Ю. И. Манин, *Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей*, -М.: издательство “Факториал Пресс” (2002).
- [MR13] R. Marsh, K. Rietsch, *The B-model connection and mirror symmetry for Grassmannians*, arXiv:1307.1085.
- [Mi83] R. Miranda, *Smooth models for elliptic threefolds*, Birational geometry of degenerations, Summer Algebraic Geometry Semin., Harvard Univ. 1981, Prog. Math. 29, 85–133 (1983).
- [Mi89] R. Miranda, *The basic theory of elliptic surfaces: notes of lectures*, ETS Editrice, 1989.
- [MM82] S. Mori, S. Mukai, *Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$* , Manuscripta Math., 36(2):147–162, 1981/82; erratum in Manuscripta Math. 110 (2003), no. 3, 407.
- [Na97] J. Nagel. *The Abel–Jacobi map for complete intersections*, Indag. Math. 8:1 (1997), 95–113.
- [Ni79] В. В. Никулин, “Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 43:1 (1979), 111–177.
- [Pri] T. Prince, диссертация, Imperial College London.
- [Pri16] T. Prince, *Efficiently computing torus charts in Landau–Ginzburg models of complete intersections in Grassmannians of planes*, Bull. of the KMS., 2017.
- [Pro05] Ю. Г. Прохоров, *Степень трехмерных многообразий Фано с каноническими горнштейновыми особенностями*, Матем. сб., 196:1 (2005), 81–122.
- [Prz07a] В. В. Пржиялковский, *Инварианты Громова–Виттена трехмерных многообразий Фано рода 6 и рода 8*, Матем. сб., 198:3 (2007), 145–158.

- [Prz07b] В. В. Пржиялковский, *Квантовые когомологии гладких полных пересечений во взвешенных проективных пространствах и особых торических многообразиях*, Матем. сб., 198:9 (2007), 107–122.
- [Prz08a] В. В. Пржиялковский, *Минимальное кольцо Громова-Виттена*, Изв. РАН. Сер. матем., 72:6 (2008), 203–222.
- [Prz08b] V. Przyjalkowski, *On Landau–Ginzburg models for Fano varieties*, Comm. Num. Th. Phys., Vol. 1, No. 4, 713–728 (2008).
- [Prz17b] В. В. Пржиялковский, *О компактификациях Калаби-Яу торических моделей Ландау-Гинзбурга для полных пересечений Фано*, Матем. заметки, 102 (2018), arXiv: 1701.08532.
- [PSh16a] V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Bounds for smooth Fano weighted complete intersections*, arXiv:1611.09556.
- [PSh16b] V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Nef partitions for codimension 2 weighted complete intersections*, arXiv:1702.00431.
- [PSh17] V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Laurent phenomenon for Landau–Ginzburg models of complete intersections in Grassmannians of planes*, Bull. of KMS, 2017.
- [Re87] M. Reid, *Young person’s guide to canonical singularities*, Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics, **46** (1987), 345–414.
- [SGA7] P. Deligne, A. Grothendieck, N. Katz, *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Lecture Notes in Math. 288, 340, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972–1973.
- [Sh15] N. Sheridan, *Homological mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in projective space*, Invent. Math. 199 (2015), no. 1, 1–186.
- [Sp81] E. Spanier, *Algebraic topology*, Corrected reprint. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.
- [Ta89] K. Takeuchi, *Some birational maps of Fano 3-folds*, Compositio Mathematica, **71** (1989), 265–283.

МИАН

ул. Губкина д. 8, Москва 119991

Россия

VICTORPRZ@MI.RAS.RU